UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

62. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT
AUSGEGEBEN IM SEPTEMBER 1958

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1958

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

62. Band/4. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Mayrhofer, K. Begründung einer Topologie in Somenräumen 277

Strubecker, K. Über Komplexflächen bei euklidischen Schraubungen . . . 297

Ferschl, F. und **Nöbauer, W.** Über eine Klasse von unauflösbaren Gruppen 324

Roppert, J. Untersuchungen über Fréchet-Räume 345

Buchbesprechungen 357

Begründung einer Topologie in Somenräumen

Von

Karl Mayrhofer, Wien

(Eingegangen am 17. Oktober 1957)

Die übliche Definition des topologischen Raumes[1] sowie die Definitionen einzelner Begriffe der Topologie verwenden nur Punktmengen als Ganzes, ohne deren Struktur (nämlich aus Punkten zu bestehen) heranzuziehen; weitere Begriffe, in deren Definition zunächst Punkte eingehen, können mittels Mengen allein charakterisiert werden. Entsprechendes gilt für die Beweise mannigfacher Sätze. Dies legt die Aufgabe nahe, geeignete Teile der Topologie zu algebraisieren, nach dem Muster von C. Carathéodory für die Maß- und Integrationstheorie[2]. An Stelle der Mengen treten dann Somen, von denen von Anfang an zu verlangen sein wird, daß sie ein geschlossenes System bilden, ferner, daß beliebig viele eine Vereinigung besitzen. Die Realisierung der Somen durch die Mengen eines abstrakten Raumes hat dann mit der gewöhnlichen Topologie im Einklang zu stehen. Andererseits sind die Somenräume allgemeiner als die Teilmengensysteme von Punkträumen, da es Somenräume gibt, die zu keinem Mengensystem isomorph sind.

Das Folgende ist ein Beitrag zur genannten Aufgabe samt einem knappen Aufbau der benötigten Somenalgebra. Letzterer schließt unmittelbar an das zuletzt von Carathéodory aufgestellte Axiomensystem an, das auf die angedeutete Weise verschärft wurde[3]. Dem topologischen Teil liegt vorwiegend das in [1] angeführte Buch von Alexandroff zugrunde.

---

[1] S. etwa P. S. Alexandroff, Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen, Berlin 1956, p. 184.

[2] C. Carathéodory, Maß und Integral und ihre Algebraisierung (herausgeg. von P. Finsler, A. Rosenthal, R. Steuerwald), Basel und Stuttgart 1956.

[3] C. Carathéodory, l. c., p. 317ff.; Gesammelte Mathematische Schriften Bd. V, München 1957, p. 250. — S. auch K. Mayrhofer, Inhalt und Maß, Wien 1952, p. 217/31.

Inhaltsübersicht. I. Allgemeine Somenräume. II. Topologische Somenräume: 1. Offene und abgeschlossene Somen. 2. Abgeschlossene Hülle und offener Kern eines Somas. 3. Topologisierung mittels Kerne und Hüllen. 4. Begrenzung und Rand eines Somas. 5. Dicht und nirgends dicht. 6. Zusammenhängende Somen. 7. Kompakte und bikompakte Somen. 8. Rationale Somenräume.

I. Allgemeine Somenräume

Unter einem *Somenraum* $\mathfrak{R}$ werde eine Menge von Objekten $A, B, \ldots$, den *Somen* verstanden, welche die folgenden Axiome I bis V erfüllen.

I. $\mathfrak{R}$ *ist teilweise geordnet.* D. h., für einzelne Somenpaare A, B ist eine Ordnungsrelation $A \subset B$ (damit gleichbedeutend $B \supset A$) erklärt, so daß gilt: a) *es ist stets* $A \subset A$; b) *aus* $A \subset B$, $B \subset C$ *folgt stets* $A \subset C$; c) *aus* $A \subset B$, $B \subset A$ *folgt stets* $A = B$.

Im Falle $A \subset B$ heißt A ein *Teil* von B und B ein *Vielfaches* von A und dgl.

II. *Es gibt zwei verschiedene Somen* O, R *mit* $O \subset A$, $R \supset A$ *für jedes* $A \in \mathfrak{R}$.

O, $\mathfrak{R}$ sind also das (nach I c) eindeutig festgelegte) „kleinste" bzw. „größte" Soma von $\mathfrak{R}$. O heißt das *leere Soma.*

Die Erklärungen von O und R sind zueinander „dual", d. h. die eine geht durch Vertauschung der Zeichen $\subset$ und $\supset$ in die andere über.

Zwei Somen A, B heißen *fremd*, in Zeichen $A \circ B$, falls sie nur O als gemeinsamen Teil besitzen. Ist neben $A \circ B$ auch $A \subset B$, so muß also $A = O$ sein. Ferner gilt sichtlich der mehrfach anzuwendende Satz: *Aus* $A \circ B$, $C \subset A$ *folgt stets* $C \circ B$.

III. *Zu jedem System von (indizierten) Somen* A_α *gibt es ein kleinstes Soma* $V = \Sigma A_\alpha$, *das jedes* A_α *umfaßt.*

Das (eindeutig festgelegte) Soma V heißt die *Vereinigung* der Somen A_α. Für endlich viele A_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ werde auch gesetzt: $V = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. V ist unabhängig von einer eventuellen Reihenfolge der A_α und in beliebigem Ausmaße assoziativ. Hiernach gilt z. B.

$$\Sigma(A_\alpha + B) = B + \Sigma A_\alpha. \tag{1}$$

Daß $A \subset B$ *ist, kann jetzt durch* $A + B = B$ *ausgedrückt werden.* Hiernach ist $A \circ B$ gleichbedeutend damit, daß die Gleichungen $X + A = A$, $X + B = B$ nur $X = O$ als gemeinsame Lösung haben.

Weiters ergibt die Definition der Vereinigung unmittelbar: *Aus* $A_\alpha \subset B_\alpha$ *folgt stets* $\Sigma A_\alpha \subset \Sigma B_\alpha$.

Durchläuft ferner α die Ordinalzahlen, die unterhalb einer betrachteten Ordinalzahl $\zeta > 0$ liegen, so stellt man sofort fest:

$$\Sigma A_\alpha = \Sigma V_\alpha \text{ mit } V_\alpha = \sum_{\lambda \leqq \alpha} A_\lambda \qquad (\alpha < \zeta).$$

IV. *Aus* $C \circ A_1$, $C \circ A_2$ *folgt stets* $C \circ (A_1 + A_2)$.

V. *Zu jedem Somenpaar* A, B *mit* $A \subset B$ *gibt es (mindestens) ein Soma* X, *so daß gilt*:

$$X + A = B,\ X \circ A.^4 \tag{2}$$

Diese Axiome I bis V ergeben nun den für den weiteren Aufbau grundlegenden

Hilfssatz. *Aus* $L \subset M + N$, $L \circ M$ *folgt stets* $L \subset N$.

Der Beweis kann wörtlich aus [2], p. 319 übernommen werden.

Mittels des Hilfssatzes zeigt man: *Es gibt genau ein Soma* X, *das* (2) *erfüllt.* Gilt nämlich neben (2) noch $Y + A = B$, $Y \circ A$, so hat man

$$X \subset B = Y + A,\ X \circ A \text{ sowie } Y \subset B = X + A,\ Y \circ A,$$

also nach dem Hilfssatz $X \subset Y$, $Y \subset X$, d. h. $X = Y$.

Das im Falle $A \subset B$ durch (2) eindeutig bestimmte Soma X heißt die *Differenz* von A, B und wird mit $B - A$ bezeichnet. $B - A$ ist also so gekennzeichnet:

$$(B - A) + A = B,\ (B - A) \circ A, \text{ falls } A \subset B. \tag{3}$$

Aus $N - L = M$, $L \subset N$ *folgt also* $L + M = N$, $L \circ M$ *und umgekehrt.* Somit gilt nach (3)

$$B - (B - A) = A, \text{ falls } A \subset B. \tag{4}$$

Die Differenz $X = B - A$ $(A \subset B)$ *ist der größte zu* A *fremde Teil von* B.

Zunächst ist nämlich $X \circ A$, $X \subset B$. Ist auch $Y \circ A$, $Y \subset B$, so hat man, wenn IV beachtet,

$$(Y + X) + A = Y + (X + A) = Y + B = B,\ (Y + X) \circ A.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Differenz muß $Y + X = X$ sein, d. h. $Y \subset X$, w.z.z.w.

Diese Kennzeichnung der Differenz ergibt ohne weiteres: *Aus* $L \subset M$ *folgt* $L - C \subset M - C$ *sowie* $C - M \subset C - L$, *soferne die Differenzen existieren.*

---

[4] Mit V ist gleichbedeutend: *Zu jedem beliebigen Somenpaar* A, B *gibt es (mindestens) ein Soma* X, *so daß gilt*:

$$X + A = A + B,\ X \circ A.$$

Nun kann man die zu III duale Aussage beweisen:

Zu jedem System von Somen A_α gibt es ein (eindeutig bestimmtes) größtes Soma, das in jedem A_α enthalten ist.

Beweis. Es werde gesetzt: $A'_\alpha = R - A_\alpha$, $V' = \Sigma A'_\alpha$,

$$D = R - V'. \tag{5}$$

Wegen $A'_\alpha \subset V'$ gilt dann $R - V' \subset R - A'_\alpha$, d. h.

$$D \subset A_\alpha \text{ für jedes } \alpha. \tag{6}$$

Ist ferner $T \subset A_\alpha$ für jedes α, so folgt

$$A'_\alpha = R - A_\alpha \subset R - T \text{ für jedes } \alpha.$$

Also gilt nach der Definition von V'

$$V' \subset R - T \text{ mit } V' \circ T$$

und folglich

$$T \subset R - V' = D. \tag{7}$$

Die Beziehungen (6), (7) besagen aber, *daß D der größte gemeinsame Teil der A_α ist.*

D heißt der *Durchschnitt* der Somen A_α und werde mit ΠA_α bezeichnet. Für endlich viele $A_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ werde auch gesetzt: $D = A_1 A_2 \ldots A_n$. D ist unabhängig von einer eventuellen Reihenfolge der A_α und in beliebigem Ausmaße assoziativ. Z. B. gilt dual zu (1)

$$\Pi(A_\alpha B) = B \Pi A_\alpha. \tag{8}$$

Daß $A \subset B$ oder $A \circ B$ ist, kann jetzt durch $AB = A$ bzw. $AB = O$ ausgedrückt werden.

Ferner ergibt die Definition des Durchschnitts unmittelbar: *Aus $A_\alpha \subset B_\alpha$ folgt stets $\Pi A_\alpha \subset \Pi B_\alpha$.*

Nach (5) ist $D + V' = R$, $D \circ V'$. Hieraus entnimmt man die *Dualitätsrelationen*:

$$R - \Pi A_\alpha = \Sigma(R - A_\alpha) \quad R - \Sigma A_\alpha = \Pi(R - A_\alpha). \tag{9}$$

Nun werde der Differenzbegriff noch verallgemeinert. Sind A, B zwei beliebige Somen, so kann man die Differenz $B - AB$ im bisherigen Sinne bilden. Diese ist zunächst fremd zu AB, ferner aber auch zu A wegen

$$(B - AB) A = [(B - AB) B] A = (B - AB)(AB) = O.$$

Folglich ist $B - AB$ der größte zu A fremde Teil von B. Dem entspricht es, $B - AB$ die *Differenz* von A, B zu nennen und ebenfalls mit $B - A$ zu bezeichnen:

$$B - A = B - AB; \tag{10}$$

für $A \subset B$ ist dies die ursprüngliche Differenz. $B - A$ ist also in jedem Falle so gekennzeichnet (vgl. (3)):

$$(B - A) + AB = B,\ (B - A) \circ A. \tag{11}$$

Hiernach gilt stets (vgl. (4))

$$B - (B - A) = AB. \tag{12}$$

Ferner folgt aus (11) durch beiderseitige Addition von A (vgl. (3))

$$(B - A) + A = A + B,\ (B - A) \circ A \tag{13}$$

und hieraus

$$B - A = (A + B) - A; \tag{14}$$

dabei steht in (14) (ebenso wie in (10)) rechts eine Differenz im ursprünglichen Sinne.

Daß $B \subset A$ ist, kann jetzt durch $B - A = O$ ausgedrückt werden, wie man aus (10) oder (14) entnimmt. *Ferner ist $B \circ A$ gleichbedeutend mit $B - A = B$* nach (10).

Da $B - A$ in jedem Falle der größte zu A fremde Teil von B ist, gelten die oben für die ursprüngliche Differenz angeführten Monotoniegesetze allgemein: *Aus $L \subset M$ folgt also ohne jede Einschränkung $L - C \subset M - C$ sowie $C - M \subset C - L$.*

Anschließend kann das Distributivgesetz der Multiplikation für endlich viele Summanden bewiesen werden: *Es ist stets*

$$C(A_1 + A_2) = C\,A_1 + C\,A_2. \tag{15}$$

Beweis. Wegen (11) gilt für $\alpha = 1, 2$

$$C\,\Sigma A_\alpha \subset \Sigma A_\alpha = \Sigma(A_\alpha - C) + \Sigma\, C\,A_\alpha. \tag{16}$$

Daneben ist wegen $C \circ (A_\alpha - C)$ nach IV $C \circ \Sigma(A_\alpha - C)$ und somit erst recht $C\,\Sigma A_\alpha \circ \Sigma(A_\alpha - C)$. Folglich ist nach (16) und dem Hilfssatz $C\,\Sigma A_\alpha \subset \Sigma\, C\,A_\alpha$. Andererseits folgt aus $A_\alpha \subset \Sigma A_\alpha$ zunächst $C\,A_\alpha \subset C\,\Sigma A_\alpha$ und hieraus $\Sigma\, C\,A_\alpha \subset C\,\Sigma A_\alpha$. Insgesamt gilt also (15).

Mittels (15) kann man nun beweisen, daß sich IV auf beliebig viele Somen A_α erweitern läßt:

Aus $C \circ A_\alpha$ folgt stets $C \circ \Sigma A_\alpha$. [5]

Beweis. Es werde gesetzt:

$$\Sigma A_\alpha = V,\ CV = D,\ V - D = U.$$

---

[5] Dies kann auch in der folgenden distributiven Form geschrieben werden: $C\,\Sigma A_\alpha = \Sigma\, C\,A_\alpha$ für $C\,A_\alpha = O$.

Aus $C \circ A_\alpha$, $D \subset C$ folgt dann $DA_\alpha = O$. Damit folgt aus $U + D = V$ durch beiderseitige Multiplikation mit A_α nach (15)

$$A_\alpha U = A_\alpha V = A_\alpha, \quad \text{d. h. } A_\alpha \subset U.$$

Dies ergibt $V \subset U$ neben $U \subset V$, d. h. $U = V$. Man hat also $V - D = V$ und folglich $D = O$ wegen $D \circ V$ neben $D \subset V$, w.z.z.w.

Nach dieser Erweiterung von IV kann aber der obige Beweis von (15) auch als Beweis für die folgende Verallgemeinerung von (15) gelesen werden: *Es gilt stets*

$$C \Sigma A_\alpha = \Sigma (C A_\alpha) \text{ bei beliebig vielen } A_\alpha. \tag{17}$$

Weiters zeigt man mittels (15): *Es gilt stets*

$$C(B - A) = CB - CA = CB - A. \tag{18}$$

Multipliziert man nämlich die Gleichung in (13) beiderseits mit C, so entsteht nach (15)

$$C(B - A) + CA = CA + CB.$$

Hieraus folgt aber, da die beiden Summanden links fremd sind, nach (14) der erste Teil von (18). Der zweite gilt nach (10).

Insbesondere wird nach (18)

$$B - A = B(R - A), \tag{19}$$

d. h., $B - A$ *ist der Durchschnitt von* B *mit dem „Komplement"* $R - A$ *von* A.

Ferner ist $B \circ A$ *gleichbedeutend* zunächst mit $B - A = B$, d. h. nach (19) mit $B(R - A) = B$, d. h. *mit* $B \subset R - A$.

Mittels (19), (17) bzw. (19), (8) ergibt sich ohne weiteres für beliebig viele Somen A_α

$$(\Sigma A_\alpha) - C = \Sigma(A_\alpha - C), \quad (\Pi A_\alpha) - C = \Pi(A_\alpha - C). \tag{20}$$

Schließlich gilt

$$(A - B) + (B - C) = A - C, \text{ falls } A \supset B \supset C. \tag{21}$$

Dies folgt aus $(A - B) + B = A$ durch beiderseitige Subtraktion von C, wenn man die erste Gleichung (20) anwendet und $(A - B) \circ C$ beachtet.

Zu jedem der Axiome I *bis* V *gilt auch die duale Aussage*; dabei entsprechen den Paaren fremder Somen die Paare *sich ergänzender Somen*, d. h. die Paare A, B mit $A + B = R$.

Dies ist für die Axiome I, II, III unmittelbar ersichtlich. Die zu IV duale Aussage: „aus $A_1 + C = R$, $A_2 + C = R$ folgt $A_1 A_2 + C = R$"

beweist man durch Multiplikation der beiden Prämissen. Schließlich gilt die zu V duale Aussage: „zu jedem Somenpaar A, B mit $A \supset B$ gibt es (mindestens) ein A ergänzendes Soma X, so daß $XA = B$ ist", da

$$X = B + (R - A) \tag{22}$$

offenbar ein solches ist.

Demnach gilt zu jeder Aussage über Somen eines Somenraumes auch die duale Aussage. Z. B. muß das Soma (22) das kleinste A ergänzende Vielfache von B sein.

Insbesondere ist der Begriff „Komplement eines Somas" zu sich selbst dual, da das Komplement A' von A durch $A + A' = R$, $AA' = O$ gekennzeichnet ist und diese Gleichungen durch Dualisieren bloß miteinander vertauscht werden.

Ferner geht das Distributivgesetz (17) durch Dualisieren über in

$$C + \Pi A_\alpha = \Pi(C + A_\alpha).$$

Die Teilsomen eines nicht leeren Somas $E \in \mathfrak{R}$ bilden mit der Ordnungsrelation als Somen von $\mathfrak{R}$ sichtlich für sich einen Somenraum $\mathfrak{E}$ mit O als leerem Soma und denselben Ergebnissen der Somenoperationen wie bezüglich $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{E}$ heiße ein *Teilraum* von $\mathfrak{R}$.

Das System der Mengen irgendeines Grundbereiches R von Elementen ist offenbar ein Somenraum $\mathfrak{R}$. *Dagegen gibt es Somenräume, die zu keinem Mengensystem isomorph sind.* Dies zeigt etwa das in [2], p. 329/32 behandelte Beispiel, bei dem die konstruierten Somen nicht nur einen vollkommenen Ring, sondern darüber hinaus einen Somenraum bilden.

Wohl aber ist ein Somenraum, soweit er einen Somenring schlechthin bildet, isomorph zu einem Mengenkörper, wie transfinite Methoden ergeben (M. H. Stone, 1937). Dies schließt in sich, daß mit endlich vielen Somen eines Somenraumes ebenso wie mit Mengen gerechnet werden darf. So muß z. B. die für Mengen bekannte Regel

$$A - (B - C) = (A - B) + AC$$

auch für Somen gelten (vgl. die Sonderfälle (4), (12)).

II. Topologische Somenräume

1. Offene und abgeschlossene Somen. Ein Somenraum $\mathfrak{R}$ heiße *topologisch*, wenn gewisse seiner Somen als *offen* erklärt sind, und zwar so, daß die folgenden drei Axiome gelten:

T_1. *O und R sind offene Somen.*

T_2. *Die Vereinigung beliebig vieler offener Somen ist stets ein offenes Soma.*

T_3 *Der Durchschnitt zweier offener Somen* (und damit endlich vieler) *ist stets ein offenes Soma.*

Die Mengen eines (hinreichend allgemein definierten) topologischen Punktraumes R bilden einen topologischen Somenraum $\mathfrak{R}$.

Ist $\mathfrak{R}$ ein topologischer Somenraum, so heißen die Komplemente $F = R - G$ der offenen Somen G *abgeschlossene* Somen. Für diese gilt:

T_1'. *R und O sind abgeschlossene Somen.*

T_2'. *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Somen F_α ist stets ein abgeschlossenes Soma.*

Mit $F_\alpha = R - G_\alpha$ bei offenem G_α gilt nämlich nach I (9) $\Pi F_\alpha = R - \Sigma G_\alpha$, wobei ΣG_α nach T_2 offen ist.

Analog ergibt sich mittels T_3

T_3'. *Die Vereinigung zweier abgeschlossener Somen* (und damit endlich vieler) *ist stets ein abgeschlossenes Soma.*

Ferner sind Somen von der Form $G - F = G(R - F)$ nach T_2 stets offen und von der Form $F - G = F(R - G)$ nach T_2' stets abgeschlossen.

Durch die Aussagen T_i' werden die Systeme der abgeschlossenen Somen, die bei einer „Topologisierung" von $\mathfrak{R}$ auftreten können, vollständig charakterisiert. Denn ist in $\mathfrak{R}$ ein System von Somen F angegeben, die im Sinne von T_1', T_2', T_3' „abgeschlossen" sind, so prüft man sofort nach, daß die Somen $G = R - F$ ein System von offenen Somen im Sinne von T_1, T_2, T_3 bilden. Die Somen F sind aber die Komplemente der G. *Man kann also $\mathfrak{R}$ auch dadurch topologisieren, daß man abgeschlossene Somen gemäß T_1', T_2', T_3' einführt und deren Komplemente als offen erklärt.*

Nach dem bisherigen sind in einem topologischen Somenraum die offenen Somen durch die Aussagen T_i und die abgeschlossenen durch die Aussagen T_i' je für sich gekennzeichnet, ferner durch die Aussage: „das Komplement eines jeden offenen Somas ist ein abgeschlossenes" miteinander verbunden. Dabei geht die eine der Aussagen T_i, T_i' jeweils dadurch in die andere über, daß man sie in der bisherigen Weise dualisiert und außerdem die Worte „offen" und „abgeschlossen" miteinander vertauscht. Ferner entsteht durch dasselbe Verfahren aus der zuletzt angeführten Aussage wieder eine richtige Aussage. Somit gilt der folgende

Dualitätssatz. *Zu jeder Aussage über offene und abgeschlossene Somen eines topologischen Somenraumes, gilt auch die duale, falls noch die Worte „offen" und „abgeschlossen" miteinander vertauscht werden.*

Es sei jetzt $\mathfrak{E}$ ein Teilraum des topologischen Somenraumes $\mathfrak{R}$ mit E als größtem Soma. Die Somen $K \in \mathfrak{E}$ von der Form

$$K = E\,G \tag{1}$$

bei beliebigem offenen $G \in \mathfrak{R}$ heißen (*relativ*) *offen in* $\mathfrak{E}$; mit $G = R - F$ nehmen sie die Form

$$K = E - F \tag{2}$$

bei beliebigem abgeschlossenen $F \in \mathfrak{R}$ an. Für $\mathfrak{E} = \mathfrak{R}$ geht (1) über in $K = G$, d. h., die „in $\mathfrak{R}$" offenen Somen sind die offenen Somen schlechthin.

Ist $G \in \mathfrak{E}$ offen in $\mathfrak{R}$, so ist G auch offen in $\mathfrak{E}$ (wegen $G = E\,G$). Ist ferner $K \in \mathfrak{E}$ offen in $\mathfrak{E}$ und E offen in $\mathfrak{R}$, so ist K auch offen in $\mathfrak{R}$ (als Durchschnitt zweier in $\mathfrak{R}$ offener Somen).

Die in $\mathfrak{E}$ offenen Somen K erfüllen die Axiome T_i (mit $\mathfrak{E}$ an Stelle von $\mathfrak{R}$), wie man (mittels I (17) bzw. I (8)) sofort nachprüft. *Mit den Somen K als offenen Somen ist also $\mathfrak{E}$ ein topologischer Somenraum*, der ein *topologischer Teilraum* von $\mathfrak{R}$ heiße. Die *in $\mathfrak{E}$ abgeschlossenen* Somen sind demnach die Komplemente $H = E - K$ der K bezüglich E; diese lassen nach (2) bzw. (1) auch die folgenden Darstellungen zu:

$$H = E\,F = E - G, \tag{3}$$

wobei F, G wieder beliebige abgeschlossene bzw. offene Somen aus $\mathfrak{R}$ sein können.

Ein in $\mathfrak{R}$ abgeschlossenes Soma aus $\mathfrak{E}$ ist auch in $\mathfrak{E}$ abgeschlossen. Andererseits ist ein in $\mathfrak{E}$ abgeschlossenes Soma auch abgeschlossen in $\mathfrak{R}$, falls E abgeschlossen in $\mathfrak{R}$ ist.

Ist $\mathfrak{S}$ ein Teilraum von $\mathfrak{E}$, so hängen die Begriffe „offen" bzw. „abgeschlossen in $\mathfrak{S}$" nicht davon ab, ob man sie auf $\mathfrak{E}$ (als topologischen Teilraum von $\mathfrak{R}$) oder auf $\mathfrak{R}$ bezieht.

2. Abgeschlossene Hülle und offener Kern eines Somas. Es sei A ein Soma des topologischen Somenraumes $\mathfrak{R}$. Unter der *abgeschlossenen Hülle* $\overline{A}$ von A werde der Durchschnitt aller abgeschlossenen Somen F_α aus $\mathfrak{R}$ verstanden, die A umfassen (ein solches Soma ist jedenfalls R). Es gilt also $A \subset \overline{A} \subset F_\alpha$ für jedes α; ferner ist $\overline{A}$ nach T_2' abgeschlossen. *Hiernach ist aber $\overline{A}$ das kleinste abgeschlossene Soma, das A umfaßt.*

Diese Kennzeichnung von $\overline{A}$ ergibt sofort:

a) $A \subset \overline{A}$; b) *A ist genau für $\overline{A} = A$ abgeschlossen*; c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; d) *aus $A \subset B$ folgt $\overline{A} \subset \overline{B}$*; e) *aus $A \subset B \subset \overline{A}$ folgt $\overline{B} = \overline{A}$*; f) $\overline{O} = O$, $\overline{R} = R$.

Ferner gilt:

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}, \tag{1}$$

$$\overline{AB} \subset \overline{A}\,\overline{B}. \tag{2}$$

Beweis. 1. Aus $A \subset A+B$, $B \subset A+B$ folgt nach d) $\overline{A} \subset \overline{A+B}$, $\overline{B} \subset \overline{A+B}$ und hieraus $\overline{A}+\overline{B} \subset \overline{A+B}$. Da andererseits $\overline{A}+\overline{B}$ ein abgeschlossenes Soma ist (nach T_3'), das $A+B$ umfaßt (wegen a)), umfaßt es auch das kleinste derartige Soma, d. i. $\overline{A+B}$. Es gilt also auch $\overline{A}+\overline{B} \supset \overline{A+B}$ und damit insgesamt die Gleichung (1).

2. Aus $AB \subset A$, $AB \subset B$ folgt $\overline{AB} \subset \overline{A}$, $\overline{AB} \subset \overline{B}$ (nach d)) und hieraus die Inklusion (2).

Weiters werde unter dem *offenen Kern* $\underline{A}$ des Somas A die Vereinigung aller offenen Somen aus $\mathfrak{R}$ verstanden, die in A enthalten sind (ein solches ist jedenfalls O). Da diese Definition von $\underline{A}$ dual zur Definition von $\overline{A}$ ist (im Sinne des Dualitätssatzes), *ist A auch das größte offene Soma, das in A enthalten ist.*

Ferner erhält man durch Dualisieren von a) bis f), sowie von (1), (2):

a') $A \supset \underline{A}$; b') *A ist genau für $\underline{A} = A$ offen*; c') $\underline{\underline{A}} = \underline{A}$; d') *aus $A \supset B$ folgt* $\underline{A} \supset \underline{B}$; e') *aus $A \supset B \supset \underline{A}$ folgt* $\underline{B} = \underline{A}$; f') $\underline{R} = R$, $\underline{O} = O$;

$$\underline{AB} = \underline{A}\,\underline{B}, \tag{1'}$$

$$\underline{A+B} \supset \underline{A} + \underline{B}. \tag{2'}$$

Satz 1. *Sind A, B komplementäre Somen aus $\mathfrak{R}$, so gilt dies auch von $\underline{A}$, $\overline{B}$:*

$$\underline{A} + \overline{B} = R, \ \underline{A} \circ \overline{B}, \ \textit{falls} \ B = R - A. \tag{3}$$

Beweis. Sind G_α die offenen Teile von A, so sind die Komplemente $F_\alpha = R - G_\alpha$ die abgeschlossenen Vielfachen von $R - A$. Zunächst hat nämlich jedes F_α diese Eigenschaft. Ist umgekehrt F ein abgeschlossenes Vielfaches von $R - A$, d. h. $F = R - G$, $F \supset R - A$ bei passendem offenen G, so muß G ein G_α (und damit F ein F_α) sein wegen $G = R - F \subset R - (R - A) = A$. Somit gilt

$$\underline{A} = \Sigma G_\alpha = \Sigma(R - F_\alpha) = R - \Pi F_\alpha = R - \overline{B}, \text{ w.z.z.w.}$$

Sind A, B sich ergänzende Somen aus R, so gilt dies auch von $\underline{A}$, $\overline{B}$:

$$\underline{A} + \overline{B} = R, \ \textit{falls} \ A + B = R.$$

Nach I (13) ist nämlich $A + (B - A) = A + B = R$, so daß also A, $B - A$ komplementäre Somen sind. Folglich gilt nach (3) bzw. d)

$$R = \underline{A} + \overline{B - A} \subset \underline{A} + \overline{B} \subset R,$$

womit die Behauptung schon bewiesen ist.

Ferner ergibt der Dualitätssatz: *Sind A, B fremde Somen, so gilt dies von $\overline{A}$, $\underline{B}$.*

Ist schließlich $\mathfrak{E}$ ein topologischer Teilraum von $\mathfrak{R}$ mit E als größtem Soma und A ein Soma aus $\mathfrak{E}$, so kann man neben $\overline{A}$, $\underline{A}$ auch die abgeschlossene Hülle $\overline{A}_{\mathfrak{E}}$ und den offenen Kern $\underline{A}_{\mathfrak{E}}$ von A bezüglich $\mathfrak{E}$ betrachten: $\overline{A}_{\mathfrak{E}}$ ist also der Durchschnitt aller in $\mathfrak{E}$ abgeschlossenen Somen, die A umfassen und entsprechend $\underline{A}_{\mathfrak{E}}$.

Satz 2. *Für jedes Soma $A \in \mathfrak{E}$ gilt*

$$\overline{A}_{\mathfrak{E}} = E\,\overline{A}. \tag{4}$$

Beweis. Die in $\mathfrak{E}$ abgeschlossenen Somen H_α haben die Form $E\,F_\alpha$ bei in $\mathfrak{R}$ abgeschlossenem F_α; ferner ist $H_\alpha \supset A$ gleichbedeutend mit $F_\alpha \supset A$ wegen $E \supset A$. Also gilt

$$\overline{A}_{\mathfrak{E}} = \Pi(E\,F_\alpha) = E\,\Pi\,F_\alpha \text{ mit } F_\alpha \supset A.$$

Hierin ist aber $\Pi\,F_\alpha = \overline{A}$ und somit (4) bewiesen.

3. Topologisierung mittels Kerne und Hüllen. In einem topologischen Somenraum $\mathfrak{R}$ ist jedem Soma A ein Soma $\underline{A}$ als offener Kern zugeordnet. Dabei gilt nach 2 jedenfalls

$$\text{I. } A \supset \underline{A}; \qquad \text{II. } \underline{R} = R; \qquad \text{III. } \underline{AB} = \underline{A}\,\underline{B}; \qquad \text{IV. } \underline{\underline{A}} = \underline{A};$$

ferner sind die offenen Somen genau jene, für die $\underline{A} = A$ ist.

Sei nun $\mathfrak{R}$ irgendein Somenraum. Um ihn zu topologisieren, kann man in der folgenden Weise vorgehen: man ordnet jedem Soma $A \in \mathfrak{R}$ ein Soma $\underline{A} \in \mathfrak{R}$ so zu, daß I bis IV gilt, und erklärt dann jene Somen A als offen, für die $\underline{A} = A$ ist. Hierdurch wird erreicht:

a) *$\mathfrak{R}$ ist ein topologischer Somenraum;*

b) *in diesem ist $\underline{A}$ jeweils der offene Kern von A.*

Beweis. Zunächst ergibt sich mittels III:

$$\text{aus } A \supset B \text{ folgt } \underline{A} \supset \underline{B}. \tag{1}$$

Statt $A \supset B$ kann man nämlich $B = AB$ schreiben; hieraus folgt nach III $\underline{B} = \underline{AB} = \underline{A}\,\underline{B}$, d. h. $\underline{A} \supset \underline{B}$.

a) Man hat zu zeigen, daß für die als offen erklärten Somen T_1, T_2, T_3 gilt.

T_1. O ist offen, da neben $O \subset \underline{O}$ nach I auch $O \supset \underline{O}$, also insgesamt $O = \underline{O}$ gilt. R ist offen nach II.

T_2. Es seien A_α irgend welche offene Somen: $\underline{A}_\alpha = A_\alpha$, ferner $V = \Sigma A_\alpha$. Nach I gilt $V \supset \underline{V}$. Ferner folgt aus $V \supset A_\alpha$ nach (1) $\underline{V} \supset \underline{A}_\alpha = A_\alpha$ und hieraus $\underline{V} \supset V$. Insgesamt hat man also $\underline{V} = V$, d. h., V ist offen.

T_3. Es seien A, B irgend zwei offene Somen: $\underline{A} = A$, $\underline{B} = B$. Nach III ist $\underline{AB} = \underline{A}\,\underline{B} = AB$, d. h., AB ist offen.

b) Man hat zu zeigen, daß stets $\underline{A}$ der größte offene Teil von A ist.

Zunächst ist $\underline{A}$ offener Teil von A nach I bzw. IV. Ist ferner G irgendein offener Teil von A, also $G \subset A$, $\underline{G} = G$, so ergibt (1) $G \subset \underline{A}$. $\underline{A}$ ist also der größte offene Teil von A.[6]

Man kann einen Somenraum $\mathfrak{R}$ auch dadurch topologisieren, daß man „dual" zum bisherigen jedem Soma $A \in \mathfrak{R}$ ein Soma $\overline{A} \in \mathfrak{R}$ so zuordnet, daß

I'. $A \subset \overline{A}$; II'. $\overline{O} = O$; III'. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$; IV'. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

gilt, und dann jene Somen A als abgeschlossen erklärt, für die $\overline{A} = A$ ist. Dabei wird $\overline{A}$ jeweils zur abgeschlossenen Hülle von A.

4. Begrenzung und Rand eines Somas. Unter der *Begrenzung* eines Somas A des topologischen Somenraumes $\mathfrak{R}$ werde das stets abgeschlossene Soma

$$A_b = \overline{A} - \underline{A} \tag{1}$$

verstanden; dafür kann man wegen $\overline{A} - \underline{A} = \overline{A}(R - \underline{A})$ nach **2** Satz 1 auch schreiben

$$A_b = \overline{A} \,.\, \overline{R - A}. \tag{2}$$

Aus (2) entnimmt man unmittelbar

$$(R - A)_b = A_b. \tag{3}$$

Weiters gelte als *Rand* A_r von A der in A enthaltene Teil von A_b, also

$$A_r = A_b\, A = (\overline{A} - \underline{A})\, A = A - \underline{A}. \tag{4}$$

Ist A abgeschlossen (d. h. $\overline{A} = A$), so wird $A_r = A_b$ und umgekehrt; ist A offen, so wird $A_r = O$ und umgekehrt. Ferner gilt nach (3) bzw. (2)

$$(R - A)_r = A_b(R - A) = \overline{A}(R - A) = \overline{A} - A. \tag{5}$$

Schließlich ergibt (4), (5) mittels I (21)

$$A_b = \overline{A} - \underline{A} = (\overline{A} - A) + (A - \underline{A}) = A_r + (R - A)_r. \tag{6}$$

Der offene Kern des Randes eines Somas A ist stets leer. Wegen $A_r = A(R - \underline{A})$ ist nämlich nach **2** (1')

$$\underline{A_r} = \underline{A} \,.\, \underline{R - \underline{A}} \subset \underline{A}(R - \underline{A}) = O.$$

[6] Man beachte, daß IV nur beim Beweise von b) verwendet wurde.

Demnach heiße jedes Soma A mit $\underline{A} = O$ ein *Randsoma. Ein solches ist nach* (4) *bzw.* (1) *auch durch* $A_r = A$[7] *sowie durch* $A_b = \overline{A}$ *gekennzeichnet.* Da z. B. die Begrenzung eines offenen Somas G mit dem Rand von $R - G$ zusammenfällt (nach (6) wegen $G_r = O$), ist diese Begrenzung ein Randsoma.

5. Dicht und nirgends dicht. Es seien A, B Somen eines topologischen Somenraumes $\mathfrak{R}$. A heiße *dicht zu* B, wenn $\overline{A} \supset B$ gilt[8]. Mittels **2** a), c), d) stellt man fest, daß die Beziehung „dicht zu" reflexiv und transitiv ist; ferner ist A dicht zu B und zugleich B dicht zu A genau für $\overline{A} = \overline{B}$.

Als Vorbereitung zeige ich: *Ist ein Soma* A *dicht zu einem offenen Soma* $G \neq O$, *so ist* $AG \neq O$.

Beweis. Sei $AG = O$, d. h. $A - G = A$. Wegen $\overline{A} \supset A$ gilt dann $\overline{A} - G \supset A$; zugleich ist $\overline{A} - G$ abgeschlossen. $\overline{A} - G$ ist also ein abgeschlossenes Soma, das A überdeckt, und daher $\overline{A} \subset \overline{A} - G$ (nach der Definition von $\overline{A}$). Beachtet man daneben $\overline{A} - G \subset \overline{A}$, so hat man insgesamt $\overline{A} - G = \overline{A}$, d. h. $\overline{A}G = O$. Da ferner A dicht zu G ist, gilt auch $\overline{A} \supset G$, d. h. $\overline{A}G = G \neq O$. Durch den gewonnenen Widerspruch ist die Behauptung bewiesen.

Satz 3. *Ein Soma* A *ist genau dann dicht zu einem offenen Soma* $K \neq O$, *wenn für jeden nicht leeren, offenen Teil* G *von* K *gilt*:

$$AG \neq O. \tag{1}$$

Beweis. Ist A dicht zu K, so ist A auch dicht zu jedem Teil von K. Folglich gilt (1) nach der eben bewiesenen Vorbereitung.

Ist A nicht dicht zu K, d. h. K nicht Teil von $\overline{A}$, dann ist $K - \overline{A} = G_0 \neq O$ bei offenem $G_0 \subset K$. Da ferner $A \circ (K - \overline{A})$ ist (wegen $A \subset \overline{A}$, $\overline{A} \circ (K - \overline{A})$), ist $AG_0 = O$ und somit (1) nicht erfüllt.

Durch wiederholte Anwendung von Satz 3 beweist man den

Satz 4. *Die Somen* A, G_0 *seien dicht zum offenen Soma* K *und* G_0 *ebenfalls offen. Dann ist auch* AG_0 *dicht zu* K.

Beweis. Man darf $K \neq O$ annehmen. Da G_0 dicht zu K ist, ergibt Satz 3 für jeden nicht leeren, offenen Teil G von K, daß $G_0 G \neq O$ ist. Da A dicht zu K und $G_0 G$ ein nicht leerer, offener Teil von K ist, muß wieder nach Satz 3 $A(G_0 G) = (AG_0) G \neq O$ sein. Neuerliche Anwendung von Satz 3 ergibt, daß AG_0 dicht zu K ist.

---

[7] Aus $A = A - \underline{A}$ folgt $\underline{A} \circ A$ neben $\underline{A} \subset A$, also $\underline{A} = O$.

[8] Sind A, B nicht leere Punktmengen eines topologischen Punktraumes, so heißt A *dicht zu* B, wenn jeder Punkt von B Berührungspunkt von A ist, d. h. $\overline{A} \supset B$.

Wählt man $G_0 = K$, so ergibt sich, *daß mit A auch AK zum offenen Soma K dicht ist* (*und natürlich mit AK auch A*).

Es sei nun $\mathfrak{E}$ ein topologischer Teilraum von $\mathfrak{R}$ mit E als größtem Soma, ferner $A \in \mathfrak{E}$, $B \in \mathfrak{E}$. Im Teilraum $\mathfrak{E}$ bedeutet „A dicht zu B" nach Satz 2, daß $E\overline{A} \supset B$ gilt. Dies ist aber wegen $E \supset B$ gleichbedeutend mit $\overline{A} \supset B$. *Unter unseren Annahmen ist es also dasselbe, daß A dicht zu B im Raume $\mathfrak{E}$ bzw. im Raume $\mathfrak{R}$ ist.*

Weiters heiße ein Soma $A \in \mathfrak{R}$ *nirgends dicht in R*, wenn A zu keinem offenen Soma aus $\mathfrak{R}$ dicht ist, das leere ausgenommen. Da die Somen, zu denen A dicht ist, die Teile von $\overline{A}$ sind, darf also $\overline{A}$ keinen offenen Teil $\neq O$ besitzen, d. h., der offene Kern von $\overline{A}$ muß leer (oder also $\overline{A}$ selber ein Randsoma) sein. Ferner folgt aus Satz 3 unmittelbar:

Ein Soma A ist genau dann nirgends dicht in R, wenn jedes nicht leere, offene Soma einen nicht leeren, offenen Teil besitzt, zu dem A fremd ist.

Mittels des Satzes 3 und dieser Folgerung beweist man den

Satz 5. *Ein Soma A ist genau dann nirgends dicht in R, wenn der offene Kern $\underline{B}$ von $B = R - A$ dicht zu R ist.*

Beweis. Sei A nirgends dicht in R. Dann hat jedes offene Soma $G \neq O$ einen offenen Teil $G_1 \neq O$, der zu A fremd ist, d. h., es ist $G_1 \subset B$ und folglich auch $G_1 \subset \underline{B}$. Dies ergibt

$$\underline{B}G \supset \underline{B}G_1 = G_1 \neq O.$$

Für jeden nicht leeren, offenen Teil G von R ist also $\underline{B}G \neq O$ und somit $\underline{B}$ nach Satz 3 dicht zu R.

Sei umgekehrt $\underline{B}$ dicht zu R. Dann ist nach Satz 3 $G_1 = \underline{B}G \neq O$ für jedes offene Soma $G \neq O$; dabei ist G_1 ein offener Teil von G, der als Teil von $\underline{B}$ fremd zu $R - \underline{B} = \overline{A}$ ist. Jedes nicht leere, offene Soma G hat also einen nicht leeren, offenen Teil G_1, zu dem $\overline{A}$ und damit auch A fremd ist. Somit ist A nirgends dicht in R.

Aus Satz 5 folgt: a) *Ist A nirgends dicht in R, so ist $R - A$ dicht zu R.*

b) *Ist A dicht zu R und offen, so ist $R - A$ nirgends dicht in R.*

c) *Sind die Somen A, B nirgends dicht in R, so auch $V = A + B$.*

Nach I (8) und 2 (1′) ist nämlich $\underline{R - V} = \underline{R - A} \,.\, \underline{R - B}$. Da hierin die Faktoren rechts offen und dicht zu R sind, ist nach Satz 4 auch $\underline{R - V}$ dicht zu R, also V nirgends dicht in R.

Ist E ein nicht leeres Soma aus $\mathfrak{R}$ und $A \subset E$, so heiße A *nirgends dicht in E*, wenn A als Soma des topologischen Teilraumes $\mathfrak{E}$ mit E als größtem Soma nirgends dicht in E ist: es darf also A zu keinem in $\mathfrak{E}$ offenem Soma dicht sein, O ausgenommen.

Falls das Soma $A \subset E \neq O$ nirgends dicht in E ist, so ist A auch nirgends dicht in R.

Andernfalls gäbe es ein in $\mathfrak{R}$ offenes Soma $G \neq O$, zu dem A dicht ist. Nach Satz 3 ist dann $AG \neq O$ und damit erst recht $EG \neq O$. In EG hätte man aber ein nicht leeres, in $\mathfrak{E}$ offenes Soma, zu dem A dicht ist (wegen $EG \subset G$), im Widerspruch zur Voraussetzung.

6. Zusammenhängende Somen. Das größte Soma R des topologischen Somenraumes $\mathfrak{R}$ heiße *zusammenhängend*, wenn es nicht möglich ist, R als Vereinigung von zwei nicht leeren, fremden, abgeschlossenen (oder gleichbedeutend offenen) Somen darzustellen. Man kann dafür auch sagen, daß R neben O, R keinen Teil besitzen darf, der offen und abgeschlossen zugleich ist. Ferner heiße ein nicht leeres Soma $A \in \mathfrak{R}$ *zusammenhängend*, wenn es als größtes Soma des topologischen Teilraumes $\mathfrak{A}$ seiner Teile zusammenhängend im ursprünglichen Sinne ist: es darf also nicht möglich sein, A als Vereinigung von zwei nicht leeren, fremden, in $\mathfrak{A}$ abgeschlossenen Somen darzustellen[9].

Sei jetzt $\mathfrak{E}$ ein topologischer Teilraum von $\mathfrak{R}$ mit E als größtem Soma, ferner A ein nicht leeres Soma aus $\mathfrak{E}$. Faßt man A als Soma von $\mathfrak{R}$ auf, so haben die im Teilraum $\mathfrak{A}$ abgeschlossenen Somen die Form AF bei in R abgeschlossenem F; faßt man dagegen A als Soma von $\mathfrak{E}$ auf, so haben sie die Form $A(EF) = AF$ wie eben. *Unter unseren Annahmen ist es also dasselbe, daß A zusammenhängend als Soma des Raumes $\mathfrak{E}$ bzw. des Raumes $\mathfrak{R}$ ist.*

Satz 6. *Es seien F_1, F_2 fremde, in $\mathfrak{R}$ abgeschlossene Somen, die nicht beide leer sind, ferner A ein zusammenhängender nicht leerer Teil von $F_1 + F_2$. Dann gilt genau eine der beiden Beziehungen: $A \subset F_1$ oder $A \subset F_2$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$A = A(F_1 + F_2) = AF_1 + AF_2; \tag{1}$$

dabei sind AF_1 und AF_2 fremde, in $\mathfrak{A}$ abgeschlossene Somen. Da A zusammenhängend ist, muß nach (1) entweder $AF_2 = O$ oder $AF_1 = O$ sein, wobei sich diese Fälle wegen $A \neq O$ ausschließen. Dabei ist aber $AF_2 = O$ sichtlich gleichbedeutend mit $A \subset F_1$ und $AF_1 = O$ mit $A \subset F_2$.

In Satz 6 können die Rolle der abgeschlossenen Somen F_i auch zwei in $\mathfrak{R}$ offene Somen übernehmen, wie ein analoger Beweis ergibt.

Mittels des Satzes 6 beweist man die folgenden Sätze 7 und 8.

[9] Für das leere Soma werde keine Festsetzung getroffen.

Satz 7. *Die Somen* $A_\alpha \in \mathfrak{R}$ *seien zusammenhängend, ferner* $D = \Pi A_\alpha \neq O$. *Dann ist auch* $V = \Sigma A_\alpha$ *zusammenhängend.*

Beweis. Sei V nicht zusammenhängend. Dann kann V in zwei nicht leere, fremde Somen H_1, H_2 zerlegt werden, die im Raume $\mathfrak{B}$ der Teilsomen von V abgeschlossen sind. Da jedes A_α ein zusammenhängender nicht leerer Teil von $V = H_1 + H_2$ ist, gilt nach Satz 6 (wenn man den Teilraum $\mathfrak{B}$ zugrundelegt) für jedes einzelne α

$$\text{entweder } A_\alpha \subset H_1 \text{ oder } A_\alpha \subset H_2. \tag{2}$$

Hieraus folgt bei gewähltem α wegen $D \subset A_\alpha$, daß $D \subset H_1$ oder $D \subset H_2$ ist; dabei schließen sich auch diese Fälle aus, da andernfalls $D \subset H_1 H_2 = O$, also $D = O$ wäre. Sei z. B. $D \subset H_1$. Dann muß nach (2) stets $A_\alpha \subset H_1$ sein (da aus $A_{\alpha_0} \subset H_2$ ja $D \subset H_2$ folgen würde). Damit gilt dann $V \subset H_1$ neben $H_1 \subset V$, d. h. $V = H_1$. Hieraus folgt aber, indem man beiderseits mit H_2 multipliziert, $H_2 = H_1 H_2 = O$ im Widerspruch zu $H_2 \neq O$.

Satz 8. *Ist das Soma* $A \in \mathfrak{R}$ *nicht leer und zusammenhängend, ferner* B *ein Soma, für das* $A \subset B \subset \overline{A}$ *gilt, so ist auch* B *zusammenhängend.*

Beweis. Sei B nicht zusammenhängend. Dann kann B in zwei nicht leere, fremde Somen H_1, H_2 zerlegt werden, die im Raume $\mathfrak{B}$ der Teilsomen von B abgeschlossen sind. Ferner ist nach Satz 6 entweder $A \subset H_1$ oder $A \subset H_2$. Sei z. B. $A \subset H_1$. Da H_1 abgeschlossen in $\mathfrak{B}$ ist, gibt es ein in $\mathfrak{R}$ abgeschlossenes Soma F, so daß $H_1 = BF$ ist. Wegen $A \subset H_1$ gilt dann $A \subset F$ und folglich $\overline{A} \subset F$. Damit erhält man wegen $B \subset \overline{A}$

$$B = B\overline{A} \subset BF = H_1$$

neben $H_1 \subset B$, also insgesamt $B = H_1$. Hieraus folgt wie im vorigen Beweis $H_2 = O$ im Widerspruch zu $H_2 \neq O$.

Es sei noch A ein Soma aus $\mathfrak{R}$, das einen zusammenhängenden nicht leeren Teil B enthält, ferner V die Vereinigung der zusammenhängenden Teile von A, die B umfassen. Nach Satz 7 ist dann auch V zusammenhängend; *und zwar ist* V *sichtlich der größte zusammenhängende Teil von* A, *der* B *umfaßt. Ferner ist* V *abgeschlossen im Teilraume* $\mathfrak{A}$. Nach Satz 8 ist nämlich die abgeschlossene Hülle $\overline{V}_\mathfrak{A}$ von V im Raume $\mathfrak{A}$ ein zusammenhängendes Soma, das außerdem B umfaßt. Da ein solches Soma nicht „größer" als V sein kann, muß also $\overline{V}_\mathfrak{A} = V$ gelten.

7. Kompakte und bikompakte Somen. Das größte Soma R eines topologischen Somenraumes $\mathfrak{R}$ heiße *kompakt*, wenn jede aus abzählbar vielen offenen Somen bestehende „Überdeckung" von R ein endliches

Teilsystem enthält, das R ebenfalls überdeckt.[10] Ein nicht leeres Soma $A \in \mathfrak{R}$ heiße *kompakt*, wenn es als größtes Soma des topologischen Teilraumes $\mathfrak{A}$ seiner Teile kompakt im ursprünglichen Sinne ist. Damit ist sichtlich gleichbedeutend, daß jede Überdeckung von A, die aus abzählbar vielen in $\mathfrak{R}$ offenen Somen besteht, eine endliche Überdeckung von A enthält.

Ist R kompakt und $F \neq O$ abgeschlossen, so ist auch F kompakt. Ist nämlich $\{G_i\}$ eine abzählbare Überdeckung von F aus in $\mathfrak{R}$ offenen Somen, so bilden die Somen G_i, $R - F$ wegen $R = F + (R - F)$ eine ebensolche Überdeckung von R. Da R kompakt ist, überdecken aber bereits endlich viele von ihnen das Soma R und damit wegen $F \circ (R - F)$ endlich viele G_i das Soma F.

Satz 9. *Das größte Soma R eines topologischen Somenraumes $\mathfrak{R}$ ist genau dann kompakt, wenn jede fallende Folge $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_i \supset \ldots$ von nicht leeren, abgeschlossenen Somen aus $\mathfrak{R}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat.*

Der Beweis verläuft formal ebenso, wie der in [1], p. 249, 3. Absatz geführte Beweis des entsprechenden Satzes für einen topologischen Punktraum R.

Versteht man unter einer *Umgebung* eines Somas $A \in \mathfrak{R}$ irgendein offenes Soma das A umfaßt, so ergibt sich mittels des Satzes 9 der

Satz 10. *Ist R kompakt und $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ eine fallende Folge von nicht leeren, abgeschlossenen Somen mit $D = \Pi F_i$, so gibt es zu jeder Umgebung G von D einen Index i_G, so daß gilt:*

$$F_i \subset G \text{ für } i \geqslant i_G. \tag{1}$$

Beweis. Die Somen $F_i' = F_i - G$ sind abgeschlossen und bilden eine fallende Folge; ferner ist $\Pi F_i' = O$ wegen

$$\Pi F_i' \circ G \text{ und } \Pi F_i' \subset \Pi F_i \subset G.$$

Da R kompakt ist, muß es also nach Satz 9 einen Index i_G geben, so daß $F_{i_G}' = O$ ist. Damit ist dann $F_i' = O$ für $i \geqslant i_G$, d. h. mit diesem i_G gilt (1).

Das größte Soma $R \in \mathfrak{R}$ heiße *bikompakt*, wenn jede aus offenen Somen bestehende Überdeckung von R eine endliche Überdeckung von R enthält. Ferner heiße ein nicht leeres Soma $A \in \mathfrak{R}$ *bikompakt*, wenn A als größtes Soma des Teilraumes $\mathfrak{A}$ bikompakt im ursprünglichen Sinne ist. Damit ist gleichbedeutend, daß jede Überdeckung von A

[10] Diese Festsetzung ist etwa für einen metrischen Raum R gleichbedeutend damit, daß jede unendliche Menge aus R mindestens einen Häufungspunkt hat.

aus in $\mathfrak{R}$ offenen Somen eine endliche Überdeckung von A enthält. Ein bikompaktes Soma ist stets kompakt.

Ist R bikompakt und $F \neq O$ abgeschlossen, so ist auch F bikompakt (vgl. o.).

Nennt man eine Menge von Somen aus $\mathfrak{R}$ *zentriert*, wenn jede endliche Teilmenge einen nicht leeren Durchschnitt hat, so gilt:

Satz 11. *Das größte Soma $R \in \mathfrak{R}$ ist genau dann bikompakt, wenn jede zentrierte Menge von abgeschlossenen Somen aus $\mathfrak{R}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat.*

Beweis. Sei R bikompakt, ferner $\{F_\alpha\}$ eine zentrierte Menge von abgeschlossenen Somen. Setzt man $G_\alpha = R - F_\alpha$, so sind die G_α offen, ferner $\Pi F_\alpha = R - \Sigma G_\alpha$. Wäre nun $\Pi F_\alpha = O$, so wäre also $\{G_\alpha\}$ eine Überdeckung von R; diese müßte, da R bikompakt ist, eine endliche Überdeckung $\{G_{\alpha_i}\}$ von R enthalten. Dann wäre aber $\Pi F_{\alpha_i} = R - \Sigma G_{\alpha_i} = O$, im Widerspruch dazu, daß die Menge $\{F_\alpha\}$ zentriert ist.

Sei umgekehrt R nicht bikompakt und $\{G_\alpha\}$ eine Überdeckung von R aus offenen Somen, die keine endliche Überdeckung von R enthält. Setzt man dann $F_\alpha = R - G_\alpha$, so gilt $\Pi F_{\alpha_i} = R - \Sigma G_{\alpha_i} \neq O$ für jede endliche Menge $\{F_{\alpha_i}\}$, neben $\Pi F_\alpha = O$. Es gibt also jetzt ein zentriertes System aus abgeschlossenen Somen mit leerem Durchschnitt. Damit ist Satz 11 bewiesen.

Weiters entspricht jetzt dem Satz 9 der

Satz 12. *Das größte Soma $R \in \mathfrak{R}$ ist genau dann bikompakt, wenn jedes fallende wohlgeordnete System*

$$F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_\alpha \supset \ldots \tag{2}$$

von nicht leeren, abgeschlossenen Somen aus $\mathfrak{R}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat.

Beweis. R sei bikompakt. Es werde angenommen, daß es ein System (2) von nicht leeren, abgeschlossenen Somen aus $\mathfrak{R}$ gäbe, dessen Durchschnitt leer ist. Dann überdecken die offenen Somen $G_\alpha = R - F_\alpha$ das Soma R wegen $\Sigma G_\alpha = R - \Pi F_\alpha$; zugleich gilt $G_0 \subset G_1 \subset \ldots$ $\ldots \subset G_\alpha \subset \ldots$. Da für je endlich viele $G_\alpha : G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_r}$ $(\alpha_1 < \ldots < \alpha_r)$ stets gilt:

$$R - (G_{\alpha_1} + \ldots + G_{\alpha_r}) = R - G_{\alpha_r} = F_{\alpha_r} \neq O,$$

gibt es kein endliches System von Somen G_α, das R überdeckt, im Widerspruch zur Bikompaktheit von R.

Umgekehrt: Jedes System (2) von nicht leeren, abgeschlossenen

Somen aus $\mathfrak{R}$ habe einen nicht leeren Durchschnitt. Wegen des Satzes 11 hat man zu zeigen, daß jede zentrierte Menge von abgeschlossenen Somen aus $\mathfrak{R}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat. Der Beweis hierfür erfolgt gemäß [1], p. 250, letzter Absatz.

Schließlich kann der Satz 10 *bei bikompaktem R auf fallende wohlgeordnete Somensysteme erweitert werden.*

8. Rationale Somenräume. Eine Menge von offenen Somen K_a des topologischen Somenraumes $\mathfrak{R}$ heiße eine *Basis* von $\mathfrak{R}$, wenn jedes offene Soma aus $\mathfrak{R}$ als Vereinigung passender K_a dargestellt werden kann. Eine Basis enthält stets das leere Soma O. Der Raum $\mathfrak{R}$ heiße *rational*, wenn er eine höchstens abzählbare Basis besitzt. Sichtlich ist jeder Teilraum eines rationalen Raumes ebenfalls rational.

Ist ferner $\mathfrak{R}$ *ein rationaler Somenraum und* $\{G_a\}$ *ein überabzählbares System offener Somen aus* $\mathfrak{R}$, *so kann* $G = \Sigma G_a$ *bereits als Vereinigung von höchstens abzählbar vielen* G_a *dargestellt werden.*

Wird nämlich jedes G_a als Vereinigung passender Somen K_i einer höchstens abzählbaren Basis von $\mathfrak{R}$ dargestellt, so treten hierbei gewisse K_{i_n} auf, deren jedes umgekehrt in einem passenden G_{a_n} liegt. Damit gilt aber

$$G = \Sigma K_{i_n} \subset \Sigma G_{a_n} \subset G, \text{ also } G = \Sigma G_{a_n}, \text{ w.z.z.w.}$$

Nun ergibt sich leicht, daß in jedem rationalen Somenraum die Begriffe kompakt und bikompakt zusammenfallen. Hierzu ist nur zu zeigen:

Satz 13. *In einem rationalen Somenraum* $\mathfrak{R}$ *ist ein kompaktes Soma A stets bikompakt.*

Es genügt, dies für $A = R$ festzustellen. Nach dem eben Bewiesenem enthält aber jede Überdeckung von R aus offenen Somen eine solche aus höchstens abzählbar vielen und diese, da R kompakt ist, eine endliche. Somit ist R bikompakt.

Ferner gilt der

Satz 14. *Die Menge aller offenen (und damit auch aller abgeschlossenen) Somen eines rationalen Somenraumes* $\mathfrak{R}$ *hat höchstens die Mächtigkeit* $\mathfrak{c}$ *des Kontinuums.*

Beweis. Sei $\{K_i\}$ eine höchstens abzählbare Basis von $\mathfrak{R}$. In jedem offenen Soma G liegen dann gewisse K_i, die durch die Menge I_G der Indizes i völlig bestimmt sind und G als Vereinigung haben; ferner müssen verschiedenen G verschiedene I_G entsprechen. Die Zuordnung von I_G zu G ist also eineindeutig. Hieraus folgt, daß die Mächtigkeit der

Menge aller G nicht größer sein kann als die der Teilmengen einer höchstens abzählbaren Menge, also nicht größer als $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Satz 15. *Der zugrundeliegende Somenraum $\mathfrak{R}$ sei rational, ferner jeder Ordinalzahl α der ersten und zweiten Zahlklasse $(0 \leqq \alpha < \omega_1)$ ein offenes Soma G_α so zugeordnet, daß*

$$\text{stets } G_\alpha \subset G_\beta \text{ oder stets } G_\alpha \supset G_\beta \text{ für } \alpha < \beta < \omega_1$$

ist. Dann gibt es ein $\alpha = \alpha_0$, für das gilt:

$$G_\alpha = G_{\alpha_0} \text{ für } \alpha_0 \leqq \alpha < \omega_1. \tag{1}$$

Beweis[11]. Es sei z. B. stets $G_\alpha \subset G_\beta$ für $\alpha < \beta$. — Es werde angenommen, daß es kein α_0 gibt, für das (1) gilt. Dann gibt es zunächst zu jedem $\alpha < \omega_1$ eine kleinste Ordinalzahl $\varkappa_\alpha$, so daß gilt:

$$\alpha < \varkappa_\alpha < \omega_1,\ G_\alpha \underset{\neq}{\subset} G_{\varkappa_\alpha}.$$

Ferner kann man für jedes $\alpha < \omega_1$ eine Ordinalzahl $\lambda_\alpha < \omega_1$ so definieren, daß gilt:

$$\lambda_\alpha < \lambda_\beta,\ G_{\lambda_\alpha} \underset{\neq}{\subset} G_{\lambda_\beta} \text{ für } \alpha < \beta < \omega_1. \tag{2}$$

Hierzu werde $\lambda_0 = 0$ gesetzt und angenommen, daß für ein beliebiges α mit $0 < \alpha < \omega_1$ die Zahlen $\lambda_\varrho < \omega_1$ für $0 \leqq \varrho < \alpha$ bereits erklärt seien. Bezeichnet man dann die erste Ordinalzahl, die größer ist als jedes dieser (höchstens abzählbar vielen) λ_ϱ mit $\alpha' < \omega_1$, so sei $\lambda_\alpha = \varkappa_{\alpha'}$. Hierdurch ist λ_α für $\alpha < \omega_1$ durch transfinite Induktion definiert. Dabei gilt (2). Für $\alpha < \beta < \omega_1$ ist nämlich

$$\lambda_\alpha < \beta' < \varkappa_{\beta'} = \lambda_\beta,\ G_{\lambda_\alpha} \subset G_{\beta'} \underset{\neq}{\subset} G_{\varkappa_\beta} = G_{\lambda_\beta}.$$

Ist nun $\{K_1, K_2, \ldots\}$ eine höchstens abzählbare Basis von $\mathfrak{R}$, so enthält jedes G_{λ_α} gewisse K_i, deren Summe dann G_{λ_α} ist; dabei sind diese K_i durch die Menge I_α der auftretenden Indizes i bestimmt. Ferner gilt nach (2) $I_\alpha \underset{\neq}{\subset} I_\beta$ für $\alpha < \beta$. Hiernach sind aber die Differenzen $D_\alpha = I_{\alpha+1} - I_\alpha$ nicht leer und disjunkt. Wählt man also aus jedem D_α $(0 \leqq \alpha < \omega_1)$ eine natürliche Zahl i_α, so erhält man überabzählbar viele untereinander verschiedene natürliche Zahlen, im Widerspruch zu deren Abzählbarkeit. Damit ist der Beweis beendet.

Satz 3 bleibt bestehen, wenn an Stelle der offenen Somen G_α abgeschlossene Somen F_α treten (da diese offene Somen G_α zu Komplementen haben).

[11] Vgl. die Beweise der Sätze 53 und 53′ in [1], p. 175/6.

Über Komplexflächen bei euklidischen Schraubungen

Von

Karl Strubecker, Karlsruhe

(*Eingegangen am 16. Januar 1958*)

In einer vor kurzem erschienenen Note[1] befassen sich *R. Bereis* und *H. Brauner* mit der Kongruenz Σ jener Bahntangenten p einer euklidischen Schraubung $\mathfrak{S}$, welche ein zur Schraubung koaxiales gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid π berühren, und mit ihren Hüllkurven k auf π (algebraischen Raumkurven 4. Ordnung), d. h. mit den auf π liegenden Komplexkurven des Bahntangentenkomplexes $\mathfrak{K}$ der Schraubung $\mathfrak{S}$. Die Autoren erörtern ferner den Ort der Gratpunkte der π berührenden Bahntangenten (eine algebraische Fläche 4. Ordnung φ) und die Hüllfläche der Ebenen, welche diese Bahntangenten als Grattangenten besitzen, (eine zu φ duale algebraische Fläche 4. Klasse ψ). Die Verfasser versuchen auch, die (zweite) Brennfläche χ der Bahntangentenkongruenz Σ durch geometrische Eigenschaften zu kennzeichnen, ohne jedoch diese (algebraische) Fläche χ genauer zu bestimmen, etwa ihre Gleichung oder ihre Ordnung und Klasse anzugeben.

Man kann alle diese Fragen am einfachsten mit den allgemeinen Überlegungen und Sätzen beantworten, die in meiner Arbeit[2] über die *Transformationstheorie des Bahntangentenkomplexes* $\mathfrak{K}$ niedergelegt sind, deren Teil I von *R. Bereis* und *H. Brauner* zitiert wird, deren für die vorliegenden Probleme wichtigerer Teil II jedoch nicht genannt wird, also offenbar nicht eingesehen wurde. Aus deren letztem Abschnitt VII,

---

[1] *R. Bereis* und *H. Brauner*, Über koaxiale euklidische Schraubungen, Mh. Math. **61**, 225—245 (1957).

[2] *A. Frey* und *K. Strubecker*, Die Transformationstheorie der quadratischen Linienkomplexe [(11) (22)], Teil I: J. reine angew. Math. **193**, 209—238 (1954), Teil II ebenda **194**, 1—20. Diese Arbeit ist eine von mir erweiterte Ausarbeitung der Straßburger Dissertation (1944) meiner ehemaligen Assistentin Frau *Annemarie Frey*, verehelichte *Neumann*. Insbesondere wurden dabei die hier interessierenden Gegenstände von mir ergänzt. Über den Gegenstand dieser Arbeiten habe ich am 11. 6. 1954 vor der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft in Wien vorgetragen.

der die *Theorie der allgemeinen Komplexflächen* behandelt, insbesondere aus den Sätzen 35 bis 37 folgen die erwähnten Dinge als Sonderfälle sehr viel allgemeinerer Theoreme.

Da der Gegenstand aus verschiedenen Gründen von erheblichem Interesse ist, möchte ich ihn im folgenden ausführlicher darlegen und dabei insbesondere den schon in der genannten Note am Schlusse angedeuteten zweckmäßigen analytischen Apparat eingehender darstellen.

§ 1. Der Komplex der Bahntangenten einer euklidischen Schraubung

1. Die *euklidische Schraubung* $\mathfrak{S}$ (vom Parameter 1) mit der z-Achse als Schraubachse ordnet dem *Punkte* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ die *Bahntangente* p mit der Parameterdarstellung

$$x = x_0 - \alpha y_0,\ y = \alpha x_0 + y_0,\ z = z_0 + \alpha \tag{1}$$

zu, die wir kürzer in komplexer Zusammenfassung schreiben können:

$$x + iy = (x_0 + iy_0)(1 + i\alpha),\ z = z_0 + \alpha. \tag{2}$$

Die Punkte P dieser Bahntangente p haben ihrerseits wieder Bahntangenten, welche in der *Bahnschmiegebene* π_0 des Punktes $P_0(x_0\, y_0\, z_0)$ liegen, und deren Gaußsche Parameterdarstellung daher nach (2) lautet

$$x + iy = (x_0 + iy_0)(1 + i\alpha)(1 + i\beta),\ z = z_0 + \alpha + \beta. \tag{3}$$

Die Gleichung dieser Bahnschmiegebene π_0 erhält man durch Elimination von $\alpha + \beta$ aus

$$\frac{x + iy}{x_0 + iy_0} = (1+i\alpha)(1+i\beta) \text{ und } z = z_0 + (\alpha+\beta)$$

in der Form

$$z = \Im\left(\frac{x + iy}{x_0 + iy_0}\right) + z_0 = \frac{x_0\, y - y_0\, x}{x_0^2 + y_0^2} + z_0. \tag{4}$$

Wir schreiben *Ebenen* π, die nicht z-parallel sind, in der Normalgestalt (Inzidenzrelation)

$$z = ux + vy + w = \Im(v + iu)(x + iy) + w, \tag{5}$$

und fassen ihre *Ebenenkoordinaten* (u, v, w) wieder kürzer in dem komplexen Größenpaar $(v + iu, w)$ zusammen. Für die *Bahnschmiegebene* π_0 des Punktes $P_0(x_0, y_0, z_0)$ folgen dann aus (4) die Formeln

$$v_0 + iu_0 = \frac{1}{x_0 + iy_0},\ w_0 = z_0. \tag{6}$$

Umgekehrt gehört zu jeder *Ebene* $\pi(u, v, w)$ ein *Gratpunkt* $P(x, y, z)$, für den sie Bahnschmiegebene ist, nämlich nach (6) der Punkt

$$x + iy = \frac{1}{v + iu}, \quad z = w. \tag{7}$$

Ebenso, wie man jedem Punkte $P(x, y, z)$ eine *Bahntangente* p zuordnen kann, (die P mit dem durch infinitesimale Schraubung entstehenden Punkt verbindet), kann man *dual* jeder *Ebene* $\pi(u, v, w)$ eine *Grattangente* zuordnen, nämlich die Schnittgerade von π mit der aus π durch infinitesimale Schraubung entstehenden Ebene. Man kann diese *Grattangente als Ort ihrer Ebenen* (u, v, w) durch die zu (2) dualen Formeln

$$v + iu = (v_0 + iu_0)(1 + i\sigma), \quad w = w_0 - \sigma \tag{8}$$

beschreiben. *Die Bahntangente* (2) *des Punktes* $P(x_0, y_0, z_0)$ *ist dabei mit der Grattangente* (8) *seiner Bahnschmiegebene* $\pi(u_0, v_0, w_0)$ *identisch.* Tatsächlich liegen die Punkte (2) in allen Ebenen (8); die Inzidenzrelation (5) lautet nämlich wegen (2) und (8)

$$z_0 + \alpha = \Im(v_0 + iu_0)(1 + i\sigma)(x_0 + iy_0)(1 + i\alpha) + (w_0 - \sigma),$$

und diese Gleichung ist zufolge (6) für alle α und σ erfüllt.

Die Bahntangenten (2) der Raumpunkte P und die Grattangenten (8) der Ebenen π des Raumes bilden insgesamt denselben *quadratischen Linienkomplex* $\mathfrak{K}$, nämlich einen *Kollineationskomplex* mit der *Segre*schen Charakteristik [(11) (22)].

Die *Monge*schen *Gleichungen* für die Linienelemente (x, y, z, dx, dy, dz) bzw. (u, v, w, du, dv, dw) dieses Komplexes $\mathfrak{K}$ findet man leicht aus (2) und (8) durch Differentation nach dem Parameter α bzw. σ und Elimination von α bzw. σ in der Gestalt

$$\Im \frac{x + iy}{d(x + iy)} + \frac{1}{dz} = 0, \quad \Im \frac{v + iu}{d(v + iu)} - \frac{1}{dw} = 0 \tag{9}$$

oder

$$(xdy - ydx)\,dz = dx^2 + dy^2, \quad (udv - vdu)\,dw = du^2 + dv^2. \tag{10}$$

2. Der *Bahntangentenkomplex* $\mathfrak{K}$ der Schraubung $\mathfrak{S}$ gestattet eine *dreigliedrige stetige Gruppe* $\mathfrak{G}_3$ von *Kollineationen in sich* mit der Darstellung

$$x' + iy' = (x + iy)(\alpha + i\beta), \quad z' = z + \gamma \tag{11}$$

oder

$$v' + iu' = \frac{v + iu}{\alpha + i\beta}, \quad w' = w + \gamma, \tag{12}$$

die erzeugt wird aus den Drehungen um die Schraubachse z, den radialen Streckungen mit der Achse z und den Schiebungen parallel zu z.

Durch die Kollineationen (11) bzw. (12) dieser kommutativen Gruppe $\mathfrak{G}_3$ werden die (eigentlichen) Punkte $P(x, y, z)$ des Raumes in einfach transitiver Weise miteinander vertauscht, ebenso die (nicht z-parallelen) Ebenen; auszunehmen sind dabei nur die Punkte der Schraubachse ($x = y = 0$) und die zur Schraubachse normalen Ebenen ($u = v = 0$). Wandert dabei der Punkt P stetig längs einer Kurve k, oder längs einer Fläche Φ, so ist dadurch im Raum eindeutig eine bestimmte eingliedrige bzw. zweigliedrige stetige Schar von Kollineationen („*Komplexschiebungen*") erklärt, bei der alle anderen Raumpunkte P' Kurven k' bzw. Flächen Φ' beschreiben, die durch die Gruppe $\mathfrak{G}_3$ zu der Bahnkurve k bzw. Bahnfläche Φ von P äquivalent („in $\mathfrak{G}_3$ kongruent") sind. Dasselbe gilt, wenn eine Ebene π stetig bei $\mathfrak{G}_3$ eine ein- oder zweiparametrige Ebenenschar (π) beschreibt; die übrigen Ebenen π' des Raumes beschreiben bei dieser stetigen Komplexschiebung zu (π) in $\mathfrak{G}_3$ „kongruente" ein- bzw. zweiparametrige Ebenenscharen (π').

Es gibt auch *Korrelationen* des Komplexes $\mathfrak{K}$ in sich, die man durch Zusammensetzung der automorphen Kollineationen mit dem *Polarsystem* $\mathfrak{P}$ der Darstellung

$$v + iu = x + iy, \quad w = -z \tag{13}$$

erhält, dessen Inzidenzfläche das **hyperbolische Paraboloid**

$$z = xy \text{ oder } z = \tfrac{1}{2}\,\Im[(x + iy)^2] \tag{14}$$

ist, oder durch Zusammensetzung mit dem *Nullsystem* $\mathfrak{N}$ der Darstellung

$$v + iu = x - iy, \quad w = z, \tag{15}$$

das mit dem Polarsystem $\mathfrak{P}$ in (13) durch die Umwendung an der x-Achse zusammenhängt, und dessen Nullstrahlen die *Bahnnormalen* der Schraubung $\mathfrak{S}$ sind.

§ 2. Komplexkurven und Komplextorsen, Komplexflächen und Komplexmannigfaltigkeiten

3. Als *Komplexkurven* k des Bahntangentenkomplexes $\mathfrak{K}$ bezeichnet man jene glatten Raumkurven

$$x = x(\alpha), \quad y = y(\alpha), \quad z = z(\alpha), \tag{16}$$

deren Linienelemente (x, y, z, dx, dy, dz) der *Monge*schen Gleichung (9) genügen. Ebenso heißt eine Torse

$$u = u(\alpha),\ v = v(\alpha),\ w = w(\alpha) \tag{17}$$

eine *Komplextorse*, wenn ihre Linienelemente (u, v, w, du, dv, dw) der *Monge*schen Gleichung (9) genügen. Es gilt dann der

Satz 1: *Wird der Punkt P mittels Komplexschiebung stetig längs einer Komplexkurve k geführt, so beschreibt auch jeder andere Raumpunkt P' eine zu k in $\mathfrak{G}_3$ äquivalente Komplexkurve k'.*

Durchläuft eine Ebene π bei einer stetigen Komplexschiebung eine Komplextorse k, so beschreibt auch jede andere Ebene π' eine zu k* in $\mathfrak{G}_3$ äquivalente Komplextorse k*'.*

Für uns sind allein die *ausgezeichneten Komplexkurven* k_m mit der Darstellung

$$x + iy = (x_0 + iy_0)\ (1 + i\alpha)^m,\ z = z_0 + m\alpha \tag{18}$$

bedeutsam, die wir daher schlechthin als *Komplexkurven* k_m bezeichnen. Der für $\alpha = 0$ entstehende Punkt $P_0(x_0\ y_0\ z_0)$ heißt der *Scheitel* der Komplexkurve k_m; das aus dem Scheitel P_0 auf die Schraubachse z gefällte Lot ist eine *Symmetrieachse* der Komplexkurve k_m. Als *Grundriß* k_m' von k_m erhält man eine sogenannte *triangulär-symmetrische Kurve*

$$\Re\left[\left(\frac{x + iy}{x_0 + iy_0}\right)^{1/m}\right] = 1, \qquad z = 0, \tag{19}$$

d. i. eine *Sinusspirale vom Index* $(-m)$, mit dem Scheitel (x_0, y_0). Dabei soll $m \neq 0$ sein.

Die Komplexkurve k_m liegt auf der *Komplexfläche* Π_m mit der Parameterdarstellung

$$x + iy = (x_0 + iy_0)\,(1 + i\alpha)^m(1 + i\beta)^m,\ z = z_0 + m\alpha + m\beta \tag{20}$$

und der Gleichung

$$z = z_0 + m\,\Im\left[\left(\frac{x + iy}{x_0 + iy_0}\right)^{1/m}\right], \tag{21}$$

die von einem *Doppelsystem von Komplexkurven* k_m, nämlich den Linien $\alpha = \text{const}$ und $\beta = \text{const}$ überzogen ist, deren *Scheitel* auf der Π_m bestimmenden Komplexkurve k_m in (18) liegen. Man kann daher Π_m dadurch erzeugen, daß man durch die Punkte P der Komplexkurve k_m die gleichartigen Komplexkurven k_m mit dem Scheitel P legt, d. h. dadurch, daß man die Komplexkurve k_m stetig durch Komplexschiebung so längs sich selbst verschiebt, daß dabei ihr Scheitel P_0 die Kurve k_m beschreibt.

Ebenso spielen die *ausgezeichneten Komplextorsen* k_m^* der Darstellung

$$v + iu = (v_0 + iu_0)\,(1 + i\alpha)^m,\ w = w_0 - m\alpha \tag{22}$$

eine besondere Rolle, die für $t = 0$ die Ebenen $\pi_0(u_0, v_0, w_0)$ als „*Scheitelebenen*" enthalten, deren *Richtkegel* durch die Gleichung

$$\Re\left[\left(\frac{v + iu}{v_0 + iu_0}\right)^{1/m}\right] = 1,\quad w = 0 \tag{23}$$

dargestellt wird, und deren *Gratlinie* eine *Komplexkurve* k ist. Auch dabei soll $m \neq 0$ sein.

Die Komplextorse k_m^*, die nach (13) aus der Komplexkurve k_m in (18) durch die *Polarität* $\mathfrak{P}$ in (13) entsteht, ist in der von den Ebenen

$$v + iu = (v_0 + iu_0)\,(1 + i\alpha)^m (1 + i\beta)^m,\ w = w_0 - m\alpha - m\beta \tag{24}$$

gebildeten Mannigfaltigkeiten Π_m^* enthalten, deren Ebenengleichung man (falls $m \neq 0$ ist) in der Form

$$w = w_0 - m\,\Im\left[\left(\frac{v + iu}{v_0 + iu_0}\right)^{1/m}\right] \tag{25}$$

schreiben kann. Diese Komplexmannigfaltigkeit Π_m^* geht aus der Komplexfläche Π_m durch die Polarität $\mathfrak{P}$ in (13) hervor; Π_m^* entsteht aus der Komplextorse k_m^* in (22) durch Komplexschiebung von k_m^* längs sich selbst, wenn dabei die *Scheitelebene* π_0 stetig die Torse k_m^* durchläuft.

4. Man beweist nun leicht den

Satz 2: *Die Gratlinie der Komplextorse k_m^* in* (22) *ist* (*falls $m \neq 0$ und $\neq 1$ ist*) *eine Komplexkurve k_{2-m}. Zwischen dem Scheitel $P_0(x_0, y_0, z_0)$ von k_{2-m} und der Scheitelebene $\pi_0(u_0, v_0, w_0)$ besteht dabei die Beziehung*

$$x_0 + iy_0 = \frac{1}{v_0 + iu_0},\ z_0 = w_0, \tag{26}$$

d. h. π_0 ist die Bahnschmiegebene von P_0.

Beweis: Die Ebenen der Torse k_m^* haben nach (5) und (22) die Gleichung

$$z = \Im(v_0 + iu_0)\,(1 + i\alpha)^m (x + iy) + (w_0 - m\alpha), \tag{*}$$

die zusammen mit den beiden daraus durch Ableitung nach α entstehenden Gleichungen

$$0 = m\,\Im\, i(v_0 + iu_0)\,(1 + i\alpha)^{m-1}(x + iy) - m \tag{**}$$

$$0 = m(m - 1)\,\Im(v_0 + iu_0)\,(1 + i\alpha)^{m-2}(x + iy) \tag{***}$$

die Gratlinie der Komplextorse k_m^* bestimmt. Wenn dann $m \neq 0$ und $m \neq 1$ ist, und man zur Abkürzung

$$(v_0 + iu_0)\,(1 + i\alpha)^{m-2}(x + iy) = \sigma + i\tau$$

setzt, folgt aus (***) $\tau = 0$ und aus (**) $\Im\, i\sigma(1 + i\alpha) = 1$, d. h. $\sigma = 1$, also

$$(v_0 + iu_0)\,(1 + i\alpha)^{m-2}(x + iy) = 1.$$

Daraus und aus (*) erhält man als Gratlinie der Komplextorse k_m^* die Kurve

$$x + iy = \frac{(1 + i\alpha)^{2-m}}{v_0 + iu_0},\quad z = w_0 + (2 - m)\,\alpha. \tag{27}$$

Das ist nach (18) eine Komplexkurve k_{2-m} mit dem Scheitel (26), w. z. b. w.

Umgekehrt folgt aus Satz 2 der

Satz 3: *Die Schmiegebenen der Komplexkurve k_m in* (18) *bilden eine Komplextorse k_{2-m}^* der Darstellung*

$$v + iu = \frac{(1 + it)^{2-m}}{x_0 + iy_0},\quad w = z_0 - (2 - m)\,t; \tag{28}$$

für deren Scheitelebene $\pi_0(u_0, v_0, w_0)$ folgt aus (22)

$$v_0 + iu_0 = \frac{1}{x_0 + iy_0},\quad w_0 = z_0, \tag{29}$$

d. h. π_0 ist die Bahnschmiegebene des Scheitels P_0 von k_m.

Ferner gilt

Satz 4: *Die Ebenen π einer Komplexmannigfaltigkeit Π_m^* umhüllen eine Komplexfläche Π_{1-m}. Zwischen der Scheitelebene π_0 von Π_m^* und dem Scheitel P_0 von Π_{1-m} besteht dabei wieder die Beziehung* (26).

Beweis: Nach (5) und (25) lauten die Gleichungen der Ebenen π von Π_m^*

$$z = \Im(v + iu)\,(x + iy) + w_0 - m\,\Im\left[\left(\frac{v + iu}{v_0 + iu_0}\right)^{1/m}\right]. \tag{†}$$

Die Punkte ihrer Hüllfläche genügen auch noch den beiden daraus durch Ableiten nach den Parametern u und v entstehenden Gleichungen

$$0 = \Im\, i\left[(x + iy) - \frac{(v + iu)^{\frac{1}{m} - 1}}{(v_0 + iu_0)^{1/m}}\right] \tag{††}$$

und

$$0 = \Im\left[(x + iy) - \frac{(v + iu)^{\frac{1}{m} - 1}}{(v_0 + iu_0)^{1/m}}\right], \tag{†††}$$

aus denen sofort $[\ldots] = 0$, d. h.

$$x + iy = \frac{(v + iu)^{\frac{1}{m}-1}}{(v_0 + iu_0)^{1/m}},$$

und nach (†) als Gleichung der Einhüllenden

$$z = w_0 + (1 - m)\,\Im[(x + iy)\,(v_0 + iu_0)]^{\frac{1}{1-m}} \tag{30}$$

folgt. Dies ist nach (21) tatsächlich eine *Komplexfläche* Π_{1-m} mit dem Scheitel (26), w. z. b. w.

Aus diesem Satze folgt umgekehrt

Satz 5: *Die Tangentenebenen π einer Komplexfläche Π_m bilden eine Komplexmannigfaltigkeit Π^*_{1-m} mit der Gleichung*

$$w = z_0 - (1 - m)\,\Im[(x_0 + iy_0)\,(v + iu)]^{\frac{1}{1-m}}. \tag{31}$$

Der Scheitel $P_0(x_0, y_0, z_0)$ von Π_m und die Scheitelebene $\pi_0(u_0, v_0, w_0)$ von Π^*_{1-m} hängen dabei durch die Formeln (29) *zusammen, d. h. π_0 ist die Bahnschmiegebene von P_0.*

Aus der Darstellung (13) der Polarität des Paraboloids $\Pi_{1/2}$ entnimmt man noch den

Satz 6: *Polar zu einer Komplexkurve k_m ist eine Komplextorse k^*_m (und umgekehrt). Ebenso ist polar zu einer Komplexfläche Π_m eine Komplexfläche Π^*_m (und umgekehrt). Den Scheiteln von k_m und Π_m entsprechen dabei polar die Scheitelebenen von k^*_m und Π^*_m.*

§ 3. Weitere Eigenschaften der Komplexkurven und Komplexflächen

5. Wir beweisen noch

Satz 7: *Legt man in den Punkten einer glatten Raumkurve k mit der Darstellung*

$$x + iy = x(\alpha) + iy(\alpha), \qquad z = z(\alpha) \tag{32}$$

die Bahntangenten, so entsteht eine Regelfläche mit der Darstellung

$$X + iY = (x(\alpha) + iy(\alpha))\,(1 + i\beta), \qquad z = z(\alpha) + \beta, \tag{33}$$

die dann und nur dann abwickelbar (Tangentenfläche einer Komplexkurve, Komplexkegel oder ebene Komplexkurve) ist, wenn k eine Komplexkurve ist.

Beweis: Die Fläche (33) ist dann und nur dann abwickelbar, wenn

$$\frac{\partial(X + iY, Z)}{\partial(\alpha, \beta)} = \begin{vmatrix} (x' + iy')\,(1 + i\beta) & z' \\ i(x + iy) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. weil nach (9) $x'(\alpha) + iy'(\alpha) \neq 0$ ist, wenn

$$1 + i\beta = iz' \frac{x + iy}{x' + iy'} \tag{34}$$

gilt, oder wenn

$$z' \Im \left(\frac{x + iy}{x' + iy'} \right) = -1 \text{ und } z' \Re \left(\frac{x + iy}{x' + iy'} \right) = \beta \tag{35}$$

gilt, d. h. nach (9) dann und nur dann, wenn die Kurve (32) eine Komplexkurve ist. Für das Hüllgebilde der Bahntangenten (33) erhält man dann nach (34) und (35) die Darstellung

$$X + iY = iz' \frac{(x + iy)^2}{x' + iy'}, \quad Z = z + z' \Re \left(\frac{x + iy}{x' + iy'} \right). \tag{36}$$

Umgekehrt folgt aus Satz 7 der

Satz 8: *Die Tangenten einer Komplexkurve* (36) *haben Gratpunkte, die wieder eine Komplexkurve* (32) *bilden.*

Wählt man als die Komplexkurve (32) eine Kurve k_m mit der Darstellung

$$x + iy = (x_0 + iy_0)(1 + i\alpha)^m, \quad z = z_0 + m\alpha, \tag{37}$$

so wird, falls $m \neq 0$ ist,

$$\frac{x + iy}{x' + iy'} = \frac{1 + i\alpha}{im} = \frac{1}{m}(\alpha - i),$$

und die von den Bahntangenten der Punkte von k_m eingehüllte Komplexkurve lautet

$$X + iY = (x_0 + iy_0)(1 + i\alpha)^{m+1}, \quad Z = z_0 + (m + 1)\alpha. \tag{38}$$

Daraus folgt

Satz 9: *Die Bahntangenten der Punkte einer Komplexkurve k_m umhüllen eine Komplexkurve k_{m+1}. Beide Kurven haben denselben Scheitel.*

Umgekehrt gilt

Satz 10: *Die Tangenten einer Komplexkurve k_m haben Gratpunkte, die eine Komplexkurve k_{m-1} bilden. Beide Kurven haben denselben Scheitel.*

Wir beweisen ferner den

Satz 11: *Legt man in den Punkten P einer glatten Raumkurve k der Darstellung* (32) *die Bahnschmiegebenen π, so ist die Gratlinie der entstehenden Torse dann und nur dann eine Komplexkurve k', wenn k selbst Komplexkurve ist.*

Umgekehrt folgt daraus wieder

Satz 12: *Die Gratpunkte der Schmiegebenen einer Raumkurve k' liegen dann und nur dann auf einer Komplexkurve k, wenn k' selbst eine Komplexkurve ist.*

Beweis: Die Bahnschmiegebenen $\pi(u, v, w)$ der Punkte $P(x, y, z)$ der Kurve (32) haben nach (6) die Koordinaten

$$v(\alpha) + iu(\alpha) = \frac{1}{x(\alpha) + iy(\alpha)}, \quad w(\alpha) = z(\alpha) \tag{39}$$

Wegen

$$v' + iu' = -\frac{x' + iy'}{(x + iy)^2}, \quad w' = z'$$

ist

$$\Im\left(\frac{v + iu}{v' + iu'} - \frac{1}{w'}\right) = -\left\{\Im\left(\frac{x + iy}{x' + iy'}\right) + \frac{1}{z'}\right\}. \tag{40}$$

Damit folgt nach (9) sofort Satz 10.

Wählt man als Kurve k die Komplexkurve k_m mit dem Scheitel $P_0(x_0, y_0, z_0)$, und der Darstellung

$$x + iy = (x_0 + iy_0)(1 + i\alpha)^m, \quad z = z_0 + m\alpha, \tag{41}$$

so erhält man nach (6) als Ort der Bahnschmiegebenen π der Punkte P von k_m die Ebenenschar

$$v + iu = (v_0 + iu_0)(1 + i\alpha)^{-m}, \quad w = w_0 + m\alpha, \tag{42}$$

d. h. eine Torse k^*_{-m} mit der Bahnschmiegebene $\pi_0(u_0, v_0, w_0)$ von P_0 als Scheitelebene. Die Gratlinie dieser Torse k^*_{-m} ist nach Satz 2 die Komplexkurve k_{m+2} mit der Darstellung

$$x + iy = (x_0 + iy_0)(1 + i\alpha)^{m+2}, \quad z = z_0 + (m + 2)\alpha. \tag{43}$$

Also gilt

Satz 13: *Die Bahnschmiegebenen π der Punkte P einer Komplexkurve k_m erzeugen eine Komplextorse k^*_{-m}, deren Gratlinie eine Komplexkurve k_{m+2} ist.*

Umgekehrt folgt

Satz 14: *Die Gratpunkte P der Schmiegebenen π einer Komplexkurve k_m bilden eine Komplexkurve k_{m-2}.*

6. Wir gehen nun aus von einer Komplexfläche Π_m mit dem Scheitel $P_0(x_0, y_0, z_0)$, deren Gleichung nach (21)

$$z = z_0 + m\,\Im\left[\left(\frac{x + iy}{x_0 + iy_0}\right)^{\frac{1}{m}}\right] \tag{44}$$

lautet und beweisen den

Satz 15: *Die Bahnschmiegebenen π der Punkte P einer Komplexfläche Π_m bilden eine Komplexmannigfaltigkeit Π^*_{-m} und hüllen eine Komplexfläche Π_{m+1} ein.*

Umgekehrt folgt

Satz 16: *Die Tangentenebenen π einer Komplexfläche Π_m (welche eine Komplexmannigfaltigkeit Π^*_{1-m} bilden) haben Gratpunkte P, die einer Komplexfläche Π_{m-1} angehören.*

Beweis: Für Bahnschmiegebenen π der Punkte P der Komplexfläche Π_m in (44) gilt nach (6), wenn $\pi_0(u_0, v_0, w_0)$ die Bahnschmiegebene des Scheitels $P_0(x_0, y_0, z_0)$ von Π_m bedeutet,

$$w = w_0 + m\,\Im\left[\left(\frac{v_0 + iu_0}{v + iu}\right)^{1/m}\right] = w_0 + m\,\Im\left[\left(\frac{v + iu}{v_0 + iu_0}\right)^{-1/m}\right]. \tag{45}$$

Nach (25) ist das die Gleichung einer Komplexmannigfaltigkeit Π^*_{-m}, deren Hüllgebilde nach Satz 5 eine Komplexfläche Π_{m+1} mit der Gleichung

$$z = z_0 - (m+1)\,\Im\left[\left(\frac{x + iy}{x_0 + iy_0}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right] \tag{46}$$

ist, w.z.b.w.

7. Als *Grenzfall* kommen unter den Komplexkurven k_m nach (18) für $m = 0$ die *Raumpunkte* P_0

$$x + iy = x_0 + iy_0,\ z = z_0 \tag{47}$$

vor, die man als *Komplexkurven* k_0 auffassen kann, wenn man als *Tangenten* die *Komplexstrahlen von* P_0 nimmt. Diese Komplexstrahlen bilden den (quadratischen) *Komplexkegel* mit dem *Scheitel* P_0, dessen Gleichung man aus (9) erhält, wenn man $x + iy = x_0 + iy_0$, $z = z_0$ ferner $dx + idy = (x - x_0) + i(y - y_0)$, $dz = z - z_0$ setzt:

$$(xy_0 - yx_0)(z - z_0) + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0. \tag{48}$$

Dual zu k_0 ist die *Komplextorse* $k_0{}^*$, die nach (22) aus der festen Ebene π_0

$$v + iu = v_0 + iu_0,\ w = w_0 \tag{49}$$

besteht, und als deren *Erzeugenden* man die in ihr enthaltenen *Komplexstrahlen* aufzufassen hat.

Die Ebenen, welche diese Komplexstrahlen enthalten, genügen nach (9) der zu (48) dualen Gleichung

$$(uv_0 - vu_0)(w - w_0) + (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = 0. \tag{50}$$

Dies ist die Ebenengleichung des *Komplexkegelschnittes*, der in der Ebene (49) enthalten ist, nämlich (in Übereinstimmung mit Satz 2) die Gleichung der *quadratischen Komplexparabel* k_2, deren Darstellung in Punktkoordinaten nach (41)

$$x + iy = (x_0 + iy_0)(1 + i\alpha)^2,\ z = z_0 + 2\alpha \tag{51}$$

lautet und die in der *Bahnschmiegebene* $\pi_0(u_0, v_0, w_0)$ ihres Scheitels $P_0(x_0, y_0, z_0)$ liegt; zwischen den Koordinaten (x_0, y_0, z_0) und (u_0, v_0, w_0) bestehen dabei die Beziehungen (26) und (29). Die Scheiteltangente der quadratischen Parabel (51) ist dabei die Bahntangente (2) des Scheitels P_0 und zugleich die Grattangente (8) der Ebene π_0.

Die Komplexparabel (51) *ist außerdem die Hüllkurve der Bahntangenten der Punkte* (2) *ihrer Scheiteltangente*, d. h. des Doppelsystems der Komplexstrahlen $\alpha = \text{const}$ und $\beta = \text{const}$, welche nach (3) die Bahnschmiegebene π_0 des Punktes P_0 überdecken.

Die *Komplexfläche* Π_0 deckt sich nach (20) mit dem festen Punkte P_0 in (47). Als ihre *Tangentenebenen* hat man die *Ebenen* π *des Bündels* mit dem Scheitel P_0 zu nehmen, die (in Übereinstimmung mit Satz 5) eine *Ebenenmannigfaltigkeit* Π_1^* bilden, deren Gleichung nach (31)

$$ux_0 + vy_0 + w - z_0 = 0 \tag{52}$$

lautet.

Wir erwähnen noch den *Sonderfall* $m = 1$, in dem man als *Komplexkurve* k_1 die *Bahntangente* (2) des Punktes (Scheitels) $P_0(x_0, y_0, z_0)$ und als *Komplextorse* k_1^* die *Grattangente* (8) der Ebene (Scheitelebene) $\pi_0(u_0, v_0, w_0)$ erhält.

Ähnlich erhält man für $m = 1$ als *Komplexfläche* Π_1 nach (4) die *Bahnschmiegebene* π_0 des Punktes P_0 und als *Komplexmannigfaltigkeit* Π_1^* die *Ebenen* π *des Bündels* mit dem Scheitel P_0, wobei wieder die Beziehungen (29) bestehen.

Daraus folgt, daß die oben aufgestellten Sätze auch für die Fälle $m = 0$ *und* $m = 1$ *gelten.*

8. Unsere bisherigen Formeln *vereinfachen* sich, wenn man den beliebigen Scheitelpunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ und die mit ihm durch (29) zusammenhängende Scheitelebene $\pi_0(u_0, v_0, w_0)$ durch eine projektive Automorphie (11) des Komplexes $\mathfrak{K}$ in den Punkt $S_0(1, 0, 0)$ und in die Ebene $\sigma_0(0, 1, 0)$ oder $z = y$ verlegt; σ_0 ist dann nach (29) wieder die Bahnschmiegebene von S_0 und S_0 der Gratpunkt von σ_0.

Die *Komplexkurve* k_m mit dem Scheitel S_0 lautet dann nach (18)

$$x + iy = (1 + i\alpha)^m,\ z = m\alpha \tag{53}$$

und die *Komplexfläche* Π_m mit dem Scheitel S_0 nach (20)

$$x + iy = (1 + i\alpha)^m (1 + i\beta)^m, \; z = m\alpha + m\beta \tag{54}$$

oder nach (21)

$$z = m\, \Im[(x + iy)^{1/m}]. \tag{55}$$

Dual lautet die Komplextorse k_m^* mit der Scheitelebene σ_0 nach (22)

$$v + iu = (1 + i\alpha)^m, \; w = -m\alpha \tag{56}$$

und die Komplexmannigfaltigkeit Π_m^* mit der Scheitelebene σ_0 nach (24)

$$v + iu = (1 + i\alpha)^m (1 + i\beta)^m, \; w = -m\alpha - m\beta \tag{57}$$

oder nach (25)

$$v + iu = -m\, \Im[(v + iu)^{1/m}]. \tag{58}$$

§ 4. Allgemeine Komplexflächen und Komplexmannigfaltigkeiten

9. Eine wichtige *Verallgemeinerung der Komplexflächen* Π_m erhält man, wenn man zwei Komplexkurven k_m und k_n verschiedener Art ($m \neq n$) durch Komplexschiebung (11) aneinander so verschiebt, daß der Scheitel $P_0(x_0, y_0, z_0)$ der einen die andere Kurve beschreibt. Die entstehenden **allgemeinen Komplexflächen** $\Pi_{m,n}$ mit dem Scheitel $P_0(x_0, y_0, z_0)$ haben die Darstellung

$$x + iy = (x_0 + iy_0) (1 + i\alpha)^m (1 + i\beta)^n, \; z = z_0 + m\alpha + n\beta \tag{59}$$

und umfassen nach (20) als *Sonderfall* $m = n$ die bisherigen *Komplexflächen* $\Pi_m = \Pi_{m,m}$, die wir daher zur besseren Unterscheidung auch als *symmetrische Komplexflächen* bezeichnen wollen.

Dual dazu sind die **allgemeinen Komplexmannigfaltigkeiten** $\Pi_{m,n}^*$ mit der Scheitelebene $\pi_0(u_0\, v_0\, w_0)$, deren Darstellung

$$v + iu = (v_0 + iu_0) (1 + i\alpha)^m (1 + i\beta)^n, \; w = w_0 - m\alpha - n\beta \tag{60}$$

lautet, und die nach (24) als *Sonderfall* für $m = n$ die bisherigen *Komplexmannigfaltigkeiten* $\Pi_m^* = \Pi_{m,m}^*$ umfassen, die wir daher zur besseren Unterscheidung auch als *symmetrische Komplexmannigfaltigkeiten* bezeichnen.

Nach (59) ist dabei $\Pi_{m,n} = \Pi_{n,m}$; ebenso ist nach (60) $\Pi_{m,n}^* = \Pi_{n,m}^*$.

Die Komplexfläche $\Pi_{m,n}$ ist mit einer Schar von Komplexkurven k_m(α-Linien $\beta = \text{const}$) und einer Schar von Komplexkurven k_n (β-Linien $\alpha = \text{const}$) überdeckt, die auf $\Pi_{m,n}$ *konjugierte Flächenkurven* bilden und für $\alpha = \beta$ eine *Komplexkurve* k_{m+n} der Darstellung

$$x + iy = (x_0 + iy_0) (1 + i\alpha)^{m+n}, \; z = z_0 + (m + n)\, \alpha \tag{61}$$

einhüllen, die eine (i. a. singuläre) *Schmieglinie* von $\Pi_{m,n}$ (i. a. eine *Rückkehrkante*) ist.

Ähnlich wie oben beweist man noch den

Satz 17: *Die Tangentenebenen π der allgemeinen Komplexfläche $\Pi_{m,n}$ in* (59) *bilden eine Komplexmannigfaltigkeit $\Pi^*_{1-m,1-n}$ mit der Darstellung*

$$\begin{aligned} v + iu &= (v_0 + iu_0)\,(1 + i\alpha)^{1-m}\,(1 + i\beta)^{1-n} \\ w &= w_0 - (1-m)\,\alpha - (1-n)\,\beta. \end{aligned} \tag{62}$$

Die Scheitelebene $\pi_0(u_0, v_0, w_0)$ von $\Pi^*_{1-m,1-n}$ ist dabei die Bahnschmiegebene des Scheitels $P_0(x_0, y_0, z_0)$ von $\Pi_{m,n}$, d. h. es bestehen die Formeln (29).

Umgekehrt umhüllen die Ebenen π einer Komplexmannigfaltigkeit $\Pi^*_{m,n}$ eine Komplexfläche $\Pi_{1-m,1-n}$.

Daraus folgt übrigens, daß Komplexflächen $\Pi_{m,n}$ mit $m + n = 1$ wegen $\Pi_{1-m,1-n} = \Pi_{n,m}$ zu sich selbst dual sind.

10. Für $m = n$ wird die *symmetrische Komplexfläche* $\Pi_{m,m} = \Pi_m$ von den auf ihr liegenden α-Linien und β-Linien, die *Komplexkurven* k_m sind und auf Π_m ein konjugiertes Netz bilden, doppelt überdeckt. Ihre Einhüllende ($\beta = \alpha$) ist eine *Komplexkurve* k_{2m} der Darstellung

$$x + iy = (x_0 + iy_0)\,(1 + i\alpha)^{2m},\quad z = z_0 + 2\,m\alpha, \tag{63}$$

die eine (reguläre) *Schmieglinie* von Π_m ist.

Um auch die übrigen Schmieglinien von Π_m anzugeben, genügt es zu bemerken, daß man die symmetrische Komplexfläche Π_m auch durch die Formeln

$$\begin{aligned} x + iy &= p^m (x_0 + iy_0)\,(1 + i\alpha)^m\,(1 + i\beta)^m, \\ z &= z_0 + p(m\alpha + m\beta) \end{aligned} \tag{64}$$

darstellen kann, in denen $p \neq 0$ einen beliebigen Parameter bedeutet, und die für $p = 1$ mit der Darstellung (20) von Π_m übereinstimmen.

Die damit auf der Komplexfläche Π_m gefundenen neuen α-Linien ($\beta = \text{const}$) und β-Linien ($\alpha = \text{const}$) liegen in dem zum Komplexe $\mathfrak{K}$ in (9) koaxialen und konsingulären quadratischen Linienkomplex $\mathfrak{K}_p$ mit der Gleichung

$$\Im \frac{x + iy}{d(x + iy)} + \frac{p}{dz} = 0, \tag{65}$$

oder

$$(x\,dy - y\,dx)\,dz = p(dx^2 + dy^2), \tag{66}$$

der von den Bahntangenten

$$x + iy = p(x_0 + iy_0)(1 + i\alpha),\ z = z_0 + p\alpha \qquad (67)$$

der Schraubung $\mathfrak{S}_p$ mit dem Parameter p (und mit der z-Achse als Schraubachse) erzeugt wird. Für $p = 1$ erhält man als Sonderfall den Bahntangentenkomplex $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}$ der Schraubung $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}$ aus **1.**

In diesen Komplexen $\mathfrak{K}_p$ sind die in (64) auftretenden Parameterlinien als *Komplexkurven* $k_m^{(p)}$ enthalten; da sie wieder auf der Komplexfläche Π_m ein *konjugiertes Netz* bilden, sind ihre für $\alpha = \beta$ entstehenden *Hüllkurven* $k_{2m}^{(p)}$

$$x + iy = p^m(x_0 + iy_0)(1 + i\alpha)^{2m},\ z = z_0 + 2mp\alpha \qquad (68)$$

die *Schmieglinien* von Π_m. Also folgt

Satz 18: *Die Schmieglinien der Komplexfläche Π_m mit der Gleichung* (21) *sind Komplexkurven $k_{2m}^{(p)}$ der Darstellung* (68) *aus den koaxialen Bahntangentenkomplexen* (65) *und werden von dem auf Π_m liegenden konjugierten Netz von Komplexkurven $k_m^{(p)}$ aus $\mathfrak{K}_p$ eingehüllt.*

Für die *allgemeinen Komplexflächen* $\Pi_{m,n}$ in (59) ist eine ähnliche Darstellung ihrer allgemeinen Schmieglinien nicht möglich. Die in (61) gefundenen *Schmieglinien* k_{m+n} sind auf ihnen vielmehr *singulär* und daher einmalig (i. a. *Rückkehrlinien*).

§ 5. Die nichtprojektiven Automorphien des Bahntangentenkomplexes $\mathfrak{K}$

11. Neben den *projektiven Automorphien* (11) des Bahntangentenkomplexes (2) der Schraubung $\mathfrak{S}$ existiert noch eine *stetige eingliedrige Gruppe A nichtprojektiver Automorphien* A_n mit der Darstellung

$$x' + iy' = (x + iy)^n,\ z' = nz. \qquad (69)$$

Für $n = 1$ entsteht die Identität A_1. Die Automorphien A_n und $A_{1/n}$ sind zueinander invers.

Aus einer Komplexkurve k_m entsteht durch die nichtprojektive Automorphie A_n eine Komplexkurve k_{mn}. Insbesondere kann man so aus dem *Komplexstrahl* k_1 durch die nichtprojektiven Automorphien A_m *alle Komplexkurven* k_m erzeugen. Dem Gratpunkt von k_1 entspricht dabei der Scheitel von k_m.

Ebenso gewinnt man durch A_n aus der *Ebene* Π_1 die beliebige *Komplexfläche* Π_n. Dem Gratpunkt von Π_1 entspricht dabei der Scheitel von Π_n.

Daraus folgt, daß irgend zwei Komplexkurven k_m und $k_{m'}$, ebenso wie irgend zwei Komplexflächen Π_m und $\Pi_{m'}$ durch die nichtprojektive Automorphie $A_{m'/m}$ zusammenhängen:

$$k_m \cdot A_{m'/m} = k_{m'},\quad \Pi_m \cdot A_{m'/m} = \Pi_{m'}. \qquad (70)$$

Die Komplexfläche $\Pi_{m/n,1}$ mit der Darstellung

$$x + iy = (x_0 + iy_0)(1 + i\alpha)^{m/n}(1 + i\beta),\ z = z_0 + \frac{m}{n}\alpha + \beta \qquad (71)$$

trägt neben den Komplexkurven $k_{m/n}$ ($\beta = \text{const}$) noch die Komplexstrahlen k_1 (α=const), deren gemeinsame Hüllkurve ($\alpha = \beta$) eine Komplexkurve $k_{\frac{m}{n}+1} = k_{\frac{m+n}{n}}$ ist.

Die Komplexfläche $\Pi_{m/n,1}$ ist daher mit der Tangentenfläche der Komplexkurve $k_{\frac{m}{n}+1}$ identisch. (Für $m=n$ erhält man als Tangentenfläche einer quadratischen Komplexparabel k_2 eine Ebene). Übt man auf sie die nichtprojektive Automorphie A_n aus (69) aus, so erhält man nach

$$\Pi_{m/n,1} \cdot A_n = \Pi_{m,n} \qquad (72)$$

die *allgemeine Komplexfläche $\Pi_{m,n}$. Aus der Hüllkurve (Gratlinie) $k_{\frac{m}{n}+1}$ der Mantellinien der Tangentenfläche $\Pi_{m/n,1}$ entsteht dabei die Schmieglinie k_{m+n} der Komplexfläche $\Pi_{m,n}$ (deren für $m \neq n$ singulärer Charakter nun ersichtlich ist).* Somit folgt

Satz 19: *Man kann jede Komplexfläche $\Pi_{m,n}$ erhalten, indem man auf die Tangentenfläche einer Komplexkurve $k_{\frac{m}{n}+1}$ (d. h. auf eine Komplexfläche $\Pi_{m/n,1}$) die Automorphie A_n ausübt.*

Bemerkung 1: Von besonderem Interesse ist die aus (69) für $m = -1$ entstehende *involutorische nichtprojektive Automorphie* A_{-1} mit der Darstellung

$$x' + iy' = \frac{1}{x + iy},\ z' = -z, \qquad (73)$$

oder ausführlicher

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2},\quad y' = \frac{-y}{x^2 + y^2},\quad z' = -z, \qquad (74)$$

bei der die Punkte $(x, 0, 0)$ und $(1/x, 0, 0)$ der x-Achse in einer *Involution* mit den Doppelpunkten $D_1 = (1, 0, 0)$ und $D_2 = (-1, 0, 0)$ vertauscht werden und die wir, weil sie von 3. Ordnung ist, als (*kubische*) *axiale Involution* $A_{-1} = \mathfrak{J}$ bezeichnen.

Diese axiale Involution $\mathfrak{J}$ äußert sich im Grundriß nach (73) als eine *Möbius-Involution*[3]; sie verwandelt z. B. die Komplexstrahlen k_1 aus (2) in Komplexkurven k_{-1} mit der Darstellung

$$x + iy = \frac{1}{(x_0 + iy_0)(1 + i\alpha)},\ z = z_0 - \alpha, \qquad (75)$$

[3] Bekannter als $\mathfrak{J}$ (aber für uns weniger zweckmäßig) ist die von *Emil Müller* (1917) eingeführte *axiale Inversion* J, die aus $\mathfrak{J}$ durch die Spiegelung an der y-Achse hervorgeht.

d. h. in *aufrechte kubische Kreise* (sogenannte *kubische Ordnungskurven* des Komplexes $\mathfrak{K}$, deren sämtliche Bisekanten Komplexstrahlen sind.

Durch das Polarsystem (13) der Quadrik $\Pi_{1/2}$ in (14) entsteht aus den nichtprojektiven Automorphien (69) des Punktraumes *im Ebenenraum* die eingliedrige *Gruppe* A^* *der nichtprojektiven Automorphien* A_n^*

$$v' + iu' = (v + iu)^n, \quad w' = nw. \tag{76}$$

Für $n = 1$ entsteht die Identität und die Automorphien A_n^* und $A_{1/n}^*$ sind zueinander *invers*.

Aus einer Komplextorse k_m^* der Darstellung (22) entsteht durch die Automorphie A_n^* eine Komplextorse k_{mn}^*.

Insbesondere kann man so *aus dem Ebenenbüschel* $k_1{}^*$ der Darstellung (8), dessen Ebenen π den Komplexstrahl k_1 mit der Darstellung (2) enthalten, *durch die Automorphien* A_n^* *alle Komplextorsen* k_n^* gewinnen. *Aus der Komplexmannigfaltigkeit* Π_m^* mit der Ebenengleichung (25) entsteht durch Anwendung der Ebenentransformation A_n^* eine *Komplexmannigfaltigkeit* Π_{mn}^*. Insbesondere wird das *Ebenenbündel* $\Pi_1{}^*$ durch die Automorphie A_n^* in das *System der Tangentenebenen der allgemeinen Komplexmannigfaltigkeit* Π_n^* verwandelt.

Daraus folgt, daß irgend zwei Komplextorsen k_m^* und $k_{m'}^*$, ebenso wie irgend zwei Komplexmannigfaltigkeiten Π_m^* und $\Pi_{m'}^*$ durch die nichtprojektive Automorphie $A_{m'/m}^*$ zusammenhängen:

$$k_m^* \cdot A_{m'/m}^* = k_{m'}^*, \quad \Pi_m^* \cdot A_{m'/m}^* = \Pi_{m'}^*. \tag{77}$$

Bemerkung 2: Von besonderem Interesse ist die für $m = -1$ entstehende *involutorische nichtprojektive Automorphie* $A^*{}_{-1}$ mit der Darstellung

$$v' + iu' = \frac{1}{v + iu}, \quad w' = -w, \tag{78}$$

oder ausführlicher

$$u' = -\frac{u}{u^2 + v^2}, \quad v' = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad w' = -w, \tag{79}$$

bei der die Ebenen $(0, v, 0)$ und $(0, 1/v, 0)$ der x-Achse in einer Involution mit den Doppelebenen $\delta_1 = (0, 1, 0)$, d. h. $z = +y$, und $\delta_2 = (0, -1, 0)$, d. h. $z = -y$, als Doppelebenen vertauscht werden, und die wir, weil sie von dritter Ordnung ist, als (*kubische*) *axiale Ebeneninvolution* $A^*{}_{-1} = \mathfrak{J}^*$ bezeichnen[4]. Diese axiale Involution $\mathfrak{J}^*$ verwandelt das Ebenenbüschel (8) eines Komplexstrahls k_1, d. h. eine *Komplextorse* $k_1{}^*$, in eine *kubische Komplextorse* $k^*{}_{-1}$(kubische Ordnungstorse) der Darstellung

[4] Durch Spiegelung an der y-Achse erhält man aus $\mathfrak{J}^*$ die von *Ludwig Eckhart* (1922) eingeführte (für uns weniger zweckmäßige) axiale *Ebenenversion* J^*, bei der sich Ebenen entsprechen, die 1) eine die z-Achse normal treffende Schnittgerade haben, und die 2) aufeinander normal stehen.

$$v + iu = \frac{1}{(v_0 + iu_0)(1 + ia)}, \quad w = -(w_0 - a), \tag{80}$$

deren *Gratlinie* nach Satz 2 eine Komplexkurve $k_{2-(-1)} = k_3$, d. h. eine *kubische Komplexparabel* mit der Darstellung

$$x + iy = (x_0 + iy_0)(1 + ia)^3, \quad z = z_0 + 3a \tag{81}$$

ist, und deren sämtliche Biplanaren Komplexstrahlen sind.

§ 6. Die Kongruenz der Bahntangenten der Punkte einer Komplexfläche und ihre Brennflächen

12. Aus unseren Sätzen erhält man weiter für die **Kongruenz der Bahntangenten** *der Punkte einer beliebigen Komplexfläche* $\Pi_{m,n}$ die folgenden Ergebnisse

Satz 20: 1) *Auf der Komplexfläche* $\Pi_{m,n}$ *liegen zwei Scharen von Komplexkurven, eine Schar von Kurven* k_m *und eine Schar von Kurven* k_n. *Die Bahntangenten der Punkte von* k_m *bilden eine Komplextorse* $\Pi_{m,1}$, *auf der eine Schar von Kurven* k_m *und die Schar der Komplexstrahlen* k_1 *liegen; Gratlinie dieser Komplextorse* $\Pi_{m,1}$ *ist eine Komplexkurve* k_{m+1}.

2) *Ebenso bilden die Bahntangenten der Punkte jeder Komplexkurve* k_n *von* $\Pi_{m,n}$ *eine Komplextorse* $\Pi_{1,n}$, *auf der neben der Schar der Komplexstrahlen* k_1 *noch eine Schar von Komplexkurven* k_n *liegt; Gratlinie dieser Komplextorse* $\Pi_{1,n}$ *ist eine Komplexkurve* k_{n+1}.

3) *Alle Gratlinien* k_{m+1} *der Torsen* $\Pi_{m,1}$ *bilden die erste Brennfläche der Kongruenz der Bahntangenten der Punkte von* $\Pi_{m,n}$. *Diese erste Brennfläche ist eine Komplexfläche* $\Pi_{m+1,n}$; *sie enthält die Gratlinien* k_{m+1} *der Torsen* $\Pi_{m,1}$ *und wird von den Torsen* $\Pi_{1,n}$ *längs deren Komplexkurven* k_n *berührt.*

4) *Alle Gratlinien* k_{n+1} *der Torsen* $\Pi_{1,n}$ *bilden die zweite Brennfläche der Kongruenz der Tangenten der Punkte von* $\Pi_{m,n}$. *Diese zweite Brennfläche ist eine Komplexfläche* $\Pi_{m,n+1}$; *sie enthält die Gratlinien* k_{n+1} *der Torsen* $\Pi_{1,n}$ *und wird von den Torsen* $\Pi_{m,1}$ *längs deren Komplexkurven* k_m *berührt.*

5) *Die Komplexkurven* k_m *und* k_n *auf* $\Pi_{m,n}$ *hüllen eine Komplexkurve* k_{m+n} *ein, die, wenn* $m \neq n$ *ist, eine singuläre Schmieglinie von* $\Pi_{m,n}$ *ist. Die Bahntangenten der Punkte von* k_{m+n} *hüllen eine Komplexkurve* k_{m+n+1} *ein, welche auf den beiden Brennflächen* $\Pi_{m+1,n}$ *und* $\Pi_{m,n+1}$ *ebenfalls gemeinsame (i. a. singuläre) Schmieglinie ist und von dem Netze der Komplexkurven* (k_{m+1}, k_n) *bzw.* (k_m, k_{n+1}) *eingehüllt wird.*

Die analytische Beschreibung dieser Beziehungen ist einfach. Ist

$$x + iy = (1 + i\alpha)^m (1 + i\beta)^n,\ z = m\alpha + n\beta \tag{82}$$

die Darstellung der Komplexfläche $\Pi_{m,n}$ mit den Komplexkurven k_m (β=const) und k_n (α=const), so bilden die Bahntangenten der Punkte von k_m die *Regelfläche*

$$x + iy = (1 + i\alpha)^m (1 + i\beta)^n (1 + i\gamma),\ z = m\alpha + n\beta + \gamma, \tag{83}$$

d. s. für $\beta = \text{const}$ die Komplextorsen $\Pi_{m,1}$ längs k_m, für $\alpha = \text{const}$ die Komplextorsen $\Pi_{1,n}$ längs k_n. Die *Gratlinien* k_{m+1} von $\Pi_{m,1}$ entstehen für $\gamma = \alpha$ und lauten

$$x + iy = (1 + i\alpha)^{m+1} (1 + i\beta)^n,\ z = (m + 1)\,\alpha + n\beta, \tag{84}$$

die *Gratlinien* k_{n+1} von $\Pi_{1,n}$ entstehen für $\gamma = \beta$ und lauten

$$x + iy = (1 + i\alpha)^m (1 + i\beta)^{n+1},\ z = m\alpha + (n + 1)\,\beta. \tag{85}$$

Diese Gratlinien erzeugen Komplexflächen $\Pi_{m+1,n}$ und $\Pi_{m,n+1}$ mit den Darstellungen (84) und (85), nämlich *die beiden Brennflächen des Systems der Bahntangenten der Komplexfläche* $\Pi_{m,n}$ in (82). Für $\alpha = \beta$ erhält man die den beiden Brennflächen gemeinsame (i. a. singuläre) *Schmieglinie* k_{m+n+1}

$$x + iy = (1 + i\alpha)^{m+n+1},\ z = (m + n + 1)\,\alpha, \tag{86}$$

welche sowohl von den Komplexkurven k_{m+1} und k_n von $\Pi_{m+1,n}$ als auch von den Komplexkurven k_m und k_{n+1} von $\Pi_{m,n+1}$ eingehüllt wird, und deren Tangentenflächen von den Bahntangenten der Punkte der (i. a. singulären) Schmieglinie k_{m+n}

$$x + iy = (1 + i\alpha)^{m+n},\ z = (m + n)\,\alpha \tag{87}$$

von $\Pi_{m,n}$ gebildet wird.

Daraus folgt

Satz 21: *Im Sonderfalle* $m = n$ *einer symmetrischen Komplexfläche* Π_m *bilden die auf* Π_m *liegenden Komplexkurven* k_m *ein Doppelsystem. Die Bahntangenten der Punkte dieser* k_m *bilden ein Doppelsystem von Torsen* $\Pi_{m,1} = \Pi_{1,m}$, *deren Gratlinien* k_{m+1} *dieselbe Komplexfläche* $\Pi_{m+1,m} = \Pi_{m,m+1}$ *erzeugen. Diese Komplexfläche besteht aus den beiden Mänteln der Brennfläche des Systems der Bahntangenten der Punkte von* Π_m *und trägt außer der Schar der Gratlinien* k_{m+1} *auch noch die (dazu konjugierte) Schar der Berührkurven* k_m *der ihr umschriebenen Torsen* $\Pi_{m,1} = \Pi_{1,m}$.

§ 7. Die Kongruenz der Komplextangenten einer Komplexfläche und ihre Brennflächen

13. Eine *Komplexfläche* $\Pi_{m,n}$ trägt zwei konjugierte Scharen von Komplexkurven k_m und k_n. Deren **Tangenten** bilden *zwei* im Komplexe $\mathfrak{K}$ enthaltene *Strahlsysteme*, von denen $\Pi_{m,n}$ die *(gemeinsame)* **erste Brennfläche** ist. Für die **zweiten Brennflächen** dieser beiden Strahlsysteme gilt als Umkehrung von Satz 20 der

Satz 22: 1) *Legt man auf einer Komplexfläche* $\Pi_{m,n}$

$$x + iy = (1 + i\alpha)^m (1 + i\beta)^n, \; z = m\alpha + n\beta \tag{88}$$

an deren Komplexkurven k_m ($\beta = const$) *die Tangenten, so erhält man Komplextorsen* $\Pi_{m-1,1}$ *mit der Darstellung*

$$x + iy = (1+i\alpha)^{m-1} (1+i\beta)^n (1+i\gamma), \; z = (m-1)\,\alpha + n\beta + \gamma, \tag{89}$$

welche neben ihren Komplexstrahlen k_1 ($\alpha = const$, $\beta = const$) *noch eine Schar von Komplexkurven* k_{m-1} ($\beta = const$, $\gamma = const$) *tragen, die zusammen die Komplexkurven* k_m ($\alpha = \gamma$, $\beta = const$ *in* (89) *oder* $\beta = const$ *in* (88)) *einhüllen.*

2) *Diese Komplextorsen* $\Pi_{m-1,1}$ *umhüllen (längs der Komplexkurven* k_{m-1} *berührend) die zweite Brennfläche des Tangentensystems der Kurven* k_m ($\beta = const$) *der ersten Brennfläche* $\Pi_{m,n}$ *in* (88).

3) *Umschreibt man außerdem der Komplexfläche* $\Pi_{m,n}$ *in* (88) *längs der (zu* k_m *konjugierten) Komplexkurven* k_n($\alpha = const$) *berührende Torsen, so entstehen Komplextorsen* $\Pi_{1,n}$ *der Darstellung* (89) *mit* $\alpha = const$, *deren Gratlinien* ($\alpha = const$, $\beta = \gamma$) *Komplexkurven* k_{n+1} *sind, und die ebenfalls auf der zweiten Brennfläche des Tangentensystems der Komplexkurven* k_m *von* $\Pi_{m,n}$ *liegen. Da diese Berührungslinien* k_{m-1} *und Gratlinien* k_{n+1} *auf ihr ebenfalls ein konjugiertes Netz bilden, ist die gesuchte* **zweite Brennfläche** *eine* **Komplexfläche** $\Pi_{m-1,n+1}$ *mit der Darstellung*

$$x + iy = (1+i\alpha)^{m-1} (1+i\beta)^{n+1}, \; z = (m-1)\,\alpha + (n+1)\,\beta. \tag{90}$$

Deren Komplexkurven umhüllen als (i. a. singuläre) Schmieglinie ($\alpha = \beta$) *eine Komplexkurve* k_{m+n}

$$x + iy = (1 + i\alpha)^{m+n}, \; z = (m + n)\,\alpha, \tag{91}$$

die mit der (singulären) **Schmieglinie** k_{m+n} *der ersten Brennfläche* $\Pi_{m,n}$ *zusammenfällt.*

4) *Analog besitzt das System der Tangenten der Komplexkurven* k_n ($\alpha = const$) *von* $\Pi_{m,n}$ *in* (88) *neben* $\Pi_{m,n}$ *als erster Brennfläche als* **zweite Brennfläche** *noch die* **Komplexfläche** $\Pi_{m+1,n-1}$ *mit der Darstellung*

$$x + iy = (1+i\alpha)^{m+1}\,(1+i\beta)^{n-1},\ z = (m+1)\,\alpha + (n-1)\,\beta. \qquad (92)$$

5) *Alle drei Brennflächen* $\Pi_{m,n}$, $\Pi_{m-1,n+1}$ *und* $\Pi_{m+1,n-1}$ *haben die* (*i. a. singuläre*) **Schmieglinie** k_{m+n} ($\alpha=\beta$)

$$x + iy = (1 + i\alpha)^{m+n},\ z = (m + n)\,\alpha \qquad (93)$$

gemeinsam, die auf ihnen von den Komplexkurven (k_m, k_n) *bzw.* (k_{m-1}, k_{n+1}) *bzw.* (k_{m+1}, k_{n-1}) *umhüllt wird.*

6) *Die den Komplexkurven* k_m *von* $\Pi_{m,n}$ *und* k_{n+1} *von* $\Pi_{m-1,n+1}$ *gemeinsamen Tangenten sind die Bahntangenten der Punkte einer Komplexfläche* $\Pi_{m-1,n}$

$$x + iy = (1 + i\alpha)^{m-1}\,(1 + i\beta)^{n},\ z = (m - 1)\,\alpha + n\beta. \qquad (94)$$

Deren Komplexkurven k_{m-1} (β=*const*) *und* k_n (α=*const*) *erzeugen durch die Bahntangenten ihrer Punkte* $P(\alpha, \beta)$

$$x + iy = (1+i\alpha)^{m-1}\,(1+i\beta)^{n}\,(1+i\gamma),\ z = (m-1)\,\alpha + n\beta + \gamma \qquad (95)$$

die beiden Scharen der Torsen $\Pi_{m-1,1}$ (β=*const*) *und* $\Pi_{1,n}$ (α=*const*) *des Systems der gemeinsamen Tangenten* (α = *const*, β = *const*) *der beiden Brennflächen* $\Pi_{m,n}$ ($\gamma=\alpha$) *und* $\Pi_{m-1,n+1}$ ($\gamma=\beta$).

7) *Die Torsen* $\Pi_{m-1,1}$ *berühren dabei die Brennfläche* $\Pi_{m-1,n+1}$ *längs Komplexkurven* k_{m-1} ($\beta=\gamma$ = *const*) *und ihre Gratlinien* k_m *liegen auf* $\Pi_{m,n}$. *Umgekehrt berühren die Torsen* $\Pi_{1,n}$ *die Brennfläche* $\Pi_{m,n}$ *längs Kurven* k_n *und ihre Gratlinien* k_{n+1} *liegen auf* $\Pi_{m-1,n+1}$.

14. Im **Sonderfall** $m = n$ einer **symmetrischen Komplexfläche** Π_m ist $\Pi_{m-1,m+1} = \Pi_{m+1,m-1}$. Weil die beiden Systeme von Komplexkurven k_m von Π_m zusammenfallen, besitzt das *Tangentensystem der Linien* k_m neben Π_m nur noch eine *einzige zweite Brennfläche* $\Pi_{m-1,m+1}$.

Genauer gilt

Satz 23: *Das System der Bahntangenten, welche eine symmetrische Komplexfläche* Π_m

$$x + iy = (1 + i\alpha)^{m}\,(1 + i\beta)^{m},\ z = m(\alpha + \beta) \qquad (96)$$

berühren, (*Komplextangenten von* Π_m), *besitzt* (*neben* Π_m) *als zweite Brennfläche eine Komplexfläche* $\Pi_{m-1,m+1}$

$$x + iy = (1+i\alpha)^{m-1}\,(1+i\beta)^{m+1},\ z = (m-1)\,\alpha + (m+1)\,\beta. \qquad (97)$$

Diese gemeinsamen Tangenten von Π_m *und* $\Pi_{m-1,m+1}$ *sind die Bahntangenten*

$$x + iy = (1+i\alpha)^{m-1}\,(1+i\beta)^{m}\,(1+i\gamma),\ z = (m-1)\,\alpha + m\beta + \gamma \qquad (98)$$

der Punkte der Komplexfläche $\Pi_{m-1,m}$

$$x + iy = (1 + i\alpha)^{m-1}(1 + i\beta)^m,\ z = (m-1)\alpha + m\beta, \tag{99}$$

die zwei Systeme von Komplextorsen bilden. Die Komplextorsen $\Pi_{m-1,1}$ ($\beta = const$) *haben als Gratlinien* k_m *die Komplexkurven* (β=*const*) *von* Π_m *und berühren die zweite Brennfläche* $\Pi_{m-1,m+1}$ *längs Komplexkurven* k_{m-1} (β=*const*); *die Komplextorsen* $\Pi_{1,m}$ (α=*const*) *berühren* Π_m *längs Komplexkurven* k_m (α=*const*) *und haben auf* $\Pi_{m-1,m+1}$ *Komplexkurven* k_{m+1} (α=*const*) *als Gratlinien. Die beiden Brennflächen* (96) *und* (97) *haben für* $\alpha = \beta$ *die Komplexkurve* k_{2m}

$$x + iy = (1 + i\alpha)^{2m},\ z = 2m\alpha \tag{100}$$

gemeinsam, die auf Π_m *reguläre und auf* $\Pi_{m-1,m+1}$ *singuläre Schmieglinie ist und von den Komplexkurven dieser Flächen eingehüllt wird.*

§ 8. Der Sonderfall des Paraboloids $\Pi_{1/2}$

15. Wir wenden uns nun zu den eingangs erwähnten **Sonderfall** der *Kongruenz* Σ *der Komplextangenten, welche das gleichseitige hyperbolische Paraboloid* $\Pi_{1/2}$ *mit der Gleichung*

$$z = \tfrac{1}{2}\,\Im[(x + iy)^2] \text{ oder } z = xy \tag{101}$$

berühren.

Diese *Komplexfläche* $\Pi_{1/2}$ mit dem „Scheitel" $S_0(1, 0, 0)$ ist nach der (zweideutigen) Parameterdarstellung

$$x + iy = (1 + i\alpha)^{1/2}(1 + i\beta)^{1/2},\ z = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \tag{102}$$

mit einem Netz von *Komplexkurven* $k_{1/2}$ (α-Linien, β-Linien) überdeckt, welche auf ihr ein einziges irreduzibles System von (rationalen) *algebraischen Raumkurven 4. Ordnung und 6. Klasse* bilden. Wir führen zweckmäßig statt α und β durch

$$\alpha = sh\ 2\varphi,\ \beta = sh\ 2\psi \tag{103}$$

die *neuen Parameter* φ und ψ ein und finden statt (102) als Darstellung der Komplexfläche $\Pi_{1/2}$

$$x+iy = \pm\,(ch\ \varphi + i\ sh\ \varphi)\,(ch\ \psi + i\ sh\ \psi),\ z = \tfrac{1}{2}(sh\ 2\varphi + sh\ 2\psi). \tag{104}$$

Die *Komplexkurven* $k_{1/2}$ (φ = const oder ψ = const) der Komplexfläche $\Pi_{1/2}$ sind daher *im Grundriß gleichseitige Hyperbeln*, deren Scheitel auf der gleichseitigen Hyperbel $x_0 + iy_0 = \pm\,(ch\ \varphi + i\ sh\ \varphi)$ liegen und aus ihr durch die Drehstreckungen mit dem Nullpunkt als Zentrum entstehen, bei denen der Scheitel auf dieser letzten Hyperbel verschoben wird.

Nach Satz 14 bilden die *Schmiegebenen der Komplexkurven* $k_{1/2}$ (α = const) von $\Pi_{1/2}$ *Komplextorsen* $k^*_{2/2}$ mit der Darstellung

$$v + iu = (1 + i\alpha)^{1/2}\,(1 + i\beta)^{3/2},\quad w = \tfrac{1}{2}\,\alpha - \tfrac{3}{2}\,\beta \tag{105}$$

oder nach (103)

$$v+iu = (ch\,\varphi+i\,sh\,\varphi)\,(ch\,\psi+i\,sh\,\psi)^3,\quad w = \tfrac{1}{2}\,sh\,2\,\psi-\tfrac{3}{2}\,sh\,2\,\psi. \tag{106}$$

Führt man noch statt φ und ψ durch

$$\sigma = th\,\frac{\varphi}{2},\quad \tau = th\,\frac{\psi}{2} \tag{107}$$

rationale Parameter (σ, τ) ein, so erhält man für die Komplexkurven $k_{1/2}$ und Komplextorsen $k^*_{3/2}$ die rationalen Darstellungen

$$\begin{aligned} x + iy &= \frac{(1 + 2\,i\,\sigma + \sigma^2)\,(1 + 2\,i\,\tau + \tau^2)}{(1 - \sigma^2)\,(1 - \tau^2)},\\ z &= \frac{2\,\sigma(1 + \sigma^2)}{(1 - \sigma^2)^2} + \frac{2\,\tau(1 + \tau^2)}{(1 - \tau^2)^2} \end{aligned} \tag{108}$$

und

$$\begin{aligned} v + iu &= \frac{(1 + 2\,i\,\sigma + \sigma^2)\,(1 + 2\,i\,\tau + \tau^2)^3}{(1 - \sigma^2)\,(1 - \tau^2)^3},\\ w &= \frac{\sigma(1 + \sigma^2)}{1 - \sigma^2} - 3\,\frac{\tau(1 + \tau^2)}{1 - \tau^2}, \end{aligned} \tag{109}$$

aus denen folgt, daß die *Komplexkurven* $k_{1/2}$ *des Paraboloids* $\Pi_{1/2}$, d. h. die Linien $\varphi =$ const und $\psi =$ const in (104), *rationale Raumkurven 4. Ordnung und 6. Klasse* sind.

Die Komplexkurven $k_{1/2}$ bilden auf dem Paraboloid $\Pi_{1/2}$ ein *konjugiertes Netz*. Dessen *Hüllkurve* besteht aus zwei reellen und zwei konjugiert komplexen *Erzeugenden* des Paraboloids $\Pi_{1/2}$, nämlich aus den *beiden reellen Bahntangenten*

$$x + iy = \pm\,(1 + i\alpha),\quad z = \alpha \tag{110}$$

der (reellen) Punkte $P_1(1, 0, 0)$ und $P_2(-1, 0, 0)$ sowie aus den beiden zueinander *konjugiert-komplexen Bahntangenten* der (konjugiert-komplexen) Punkte $P_3(0, i, 0)$ und $P_4(0, -i, 0)$, d. h. nach (1) den Geraden

$$x = -i\alpha,\ y = +i,\ z = \alpha \text{ und } x = +i\alpha,\ y = -i,\ z = \alpha,$$

deren Punkte ebenfalls den Formeln (110) genügen.

16. Die *Tangenten der Komplexkurven* $k_{1/2}$ *von* $\Pi_{1/2}$ *sind* nach Satz 23 die *Bahntangenten der Punkte der Komplexfläche* $\Pi_{-1/2,\,1/2}$ mit der Darstellung

$$x + iy = (1 + i\alpha)^{-1/2}\,(1 + i\beta)^{1/2},\quad z = -\tfrac{1}{2}\,\alpha + \tfrac{1}{2}\,\beta. \tag{111}$$

Wegen $2\,iz = -(1+i\alpha)+(1+i\beta)$ folgt daraus, wenn man β eliminiert,

$$(x+iy)^2 = \frac{1+i\beta}{1+i\alpha} = \frac{2\,iz+(1+i\alpha)}{1+i\alpha},$$

und daraus weiter durch Sondern von Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned} (x^2-y^2-1) - 2\,\alpha xy &= 0, \\ 2(xy-z) \quad + \alpha(x^2-y^2-1) &= 0, \end{aligned}$$

also schließlich, durch Elimination von α,

$$(x^2-y^2-1)^2 + 4\,xy(xy-z) = 0 \tag{112}$$

als *Gleichung der Komplexfläche* $\Pi_{-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}$.

Also gilt

Satz 24: *Die Punkte der Komplexfläche* $\Pi_{-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}$ *4. Ordnung mit der cartesischen Gleichung* (112) *haben Bahntangenten, welche das Paraboloid* $\Pi_{\frac{1}{2}}$ *mit der Gleichung* $xy - z = 0$ *berühren. Diese Bahntangenten*

$$x+iy = \frac{(1+i\beta)^{\frac{1}{2}}}{(1+i\alpha)^{\frac{1}{2}}}\,(1+i\gamma),\quad z = -\tfrac{1}{2}\,\alpha + \tfrac{1}{2}\,\beta + \gamma \tag{113}$$

sind Tangenten der Komplexkurven $k_{\frac{1}{2}}$ *des Paraboloids* $\Pi_{\frac{1}{2}}$ *und bilden das System* Σ *der* $\Pi_{\frac{1}{2}}$ *berührenden Strahlen des Bahntangentenkomplexes* $\mathfrak{K}$.

Eine Diskussion der Fläche (112) als Punktort findet man bei *Bereis-Brauner*[1].

Nach Satz 17 bilden die *Tangentenebenen der Fläche* $\Pi_{-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}$ eine *Komplexmannigfaltigkeit* $\Pi^*_{\frac{3}{2},\,\frac{1}{2}}$ mit der Darstellung

$$v+iu = (1+i\alpha)^{\frac{3}{2}}\,(1+i\beta)^{\frac{1}{2}},\quad w = -\tfrac{3}{2}\,\alpha - \tfrac{1}{2}\,\beta. \tag{114}$$

Elimination von α und β durch Resultantenbildung führt mit den Abkürzungen

$$\sigma = v^2 - u^2 - 1 \text{ und } \tau = -(uv+w)$$

auf die Ebenengleichung dieser Fläche

$$\begin{vmatrix} 3 & 2w & -6 & -6w & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2w & -6 & -6w & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2w & -6 & -6w & \sigma \\ 4 & 3w & 0 & \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3w & 0 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3w & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3w & 0 & \tau \end{vmatrix} = 0, \tag{115}$$

oder ausführlich

$$4(\tau w + 4\sigma)^3 + 27(\sigma w^2 - \tau^2)^2 + 288(\sigma w - 6\tau)^2 + 864\,\tau^2(\sigma - 16) +$$
$$+ 36[\sigma\tau w(w^2 + 192) + \tau w(9w^4 + 96w^2 + 15\tau^2) + \tau^2 w^2(2w^2 + 87)] = 0,$$

deren Glied höchster (neunter) Ordnung $4w^3\tau^3 = -4w^3(uv + w)^3$ lautet. Die *Komplexfläche* $\Pi_{-1/2,\,1/2}$ ist also eine *algebraische Fläche 4. Ordnung und 9. Klasse.*

Wir bemerken noch, daß die Bahntangenten (113) der Punkte P der Komplexfläche $\Pi_{-1/2,\,1/2}$ in (111) nach (6) die Grattangenten der Ebenen

$$v + iu = \frac{1}{x + iy} = \frac{(1 + i\alpha)^{1/2}}{(1 + i\beta)^{1/2}},\quad w = z = -\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta \qquad (116)$$

sind, die eine Komplexmannigfaltigkeit $\Pi^*_{1/2,\,-1/2}$ bilden und daher nach Satz 17 eine Komplexfläche $\Pi_{1/2,\,3/2}$ einhüllen. Nach (13) entspricht diese $\Pi^*_{1/2,\,-1/2}$ der Fläche $\Pi_{-1/2,\,1/2}$ von (111) in dem Polarsystem $\mathfrak{P}$ des Paraboloids $\Pi_{1/2}$. Die *Ebenengleichung von* $\Pi^*_{1/2,\,-1/2}$ entsteht daher aus (112), indem man die Koordinaten (x, y, z) durch $(v, u, -w)$ ersetzt, wodurch man

$$(v^2 - u^2 - 1)^2 + 4\,uv(uv + w) = 0 \qquad (117)$$

erhält. Es folgt

Satz 25: *Das System Σ der Komplextangenten von $\Pi_{1/2}$ besteht aus den Grattangenten der Ebenen π der Mannigfaltigkeit 4. Klasse* (117), *deren Punktort eine Komplexfläche $\Pi_{1/2,\,3/2}$ der Ordnung 9 ist.*

17. Das *System* Σ der $\Pi_{1/2}$ *berührenden Komplextangenten* kann man nach Satz 23 *in zwei Scharen von Komplextorsen* $\Pi_{-1/2,\,1}$ *und* $\Pi_{1,\,1/2}$ *zerlegen*, die von den Bahntangenten (113) der Punkte ($\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$) der Komplexkurven $k_{-1/2}$ und $k_{1/2}$ der Komplexfläche $\Pi_{-1/2,\,1/2}$ in (111) gebildet werden. Die *Komplexkurven* $k_{-1/2}$ (Linien $\beta = \text{const}$ in (111)) sind *algebraische Kurven 8. Ordnung und 10. Klasse*, die *Komplexkurven* $k_{1/2}$ (Linien $\alpha = \text{const}$ in (111)) sind, wie schon erwähnt, *Kurven 4. Ordnung und 6. Klasse.* Die Gratlinien der Torsen $\Pi_{-1/2,\,1}$ (Komplextorsen $k^*_{3/2}$) liegen als Komplexkurven $k_{1/2}$ auf dem Paraboloid $\Pi_{1/2}$; die Torsen $\Pi_{1,\,1/2}$ sind dem Paraboloid $\Pi_{1/2}$ längs seiner Komplexkurven $k_{1/2}$ berührend umschrieben.

Die **zweite Brennfläche** *des Systems Σ der Komplextangenten des Paraboloids $\Pi_{1/2}$* ist nach Satz 23 *eine* **Komplexfläche** $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ mit der Darstellung

$$x + iy = (1 + i\alpha)^{-1/2}(1 + i\beta)^{3/2},\quad z = -\tfrac{1}{2}\alpha + {}^3/_2\beta, \qquad (118)$$

die wegen $m + n = -1/2 + 3/2 = 1$ *zu sich selbst dual*, nämlich in dem Polarsystem $\mathfrak{P}$ von $\Pi_{1/2}$ *autopolar* ist.

Die Torsen $\Pi_{-1/2,\,1}$ (Komplextorsen $k^*_{3/2}$) berühren die Fläche $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ längs ihrer *Komplexkurven* $k_{-1/2}$ ($\beta = \text{const}$) 8. Ordnung und 10. Klasse; die Torsen $\Pi_{1,\,1/2}$ (Komplextorsen $k^*_{1/2}$) haben als Gratlinien die *Komplexkurven* $k_{3/2}$ ($\alpha = \text{const}$) von $\Pi_{-1/2,\,3/2}$, d. s. algebraische *Kurven der Ordnung 16 und Klasse 14.*

Um die *Gleichung dieser zweiten Brennfläche* $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ zu gewinnen, eliminieren wir aus (118) zuerst den Parameter α. Aus

$$(x+iy)^2 = \frac{(1+i\beta)^3}{1+i\alpha}, \quad 2(1+iz) = 3(1+i\beta) - (1+i\alpha) \tag{119}$$

folgt so

$$(1+i\beta)^3 - 3(1+i\beta)\,(x+iy)^2 + 2(1+iz)\,(x+iy)^2 = 0$$

und daraus durch Sondern von Reellem und Imaginärem

$$\begin{gathered} 3\,\beta^2 - 6\,xy\beta + (x^2 - y^2 - 1 + 4\,xyz) = 0, \\ \beta^3 + 3(x^2 - y^2 - 1)\,\beta + 2(xy - (x^2 - y^2)\,z) = 0. \end{gathered} \tag{120}$$

Mit den Abkürzungen

$$\sigma = x^2 - y^2 - 1, \;\; \tau = xy - (x^2 - y^2)\,z = (xy - z) - \sigma\,z \tag{121}$$

lautet (120)

$$\begin{gathered} 3\,\beta^2 - 6\,xy\beta + (\sigma + 4\,xyz) = 0, \\ \beta^3 + 3\,\sigma\,\beta + 2\,\tau = 0, \end{gathered} \tag{122}$$

woraus man den Parameter β leicht durch Resultantenbildung eliminieren kann. Die *Gleichung der zweiten Brennfläche* (119) des Strahlsystems Σ der Komplextangenten von $\Pi_{1/2}$ lautet daher zunächst

$$\begin{vmatrix} 3 & -6\,xy & \sigma + 4\,xyz & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6\,xy & \sigma + 4\,xyz & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6\,xy & \sigma + 4\,xyz \\ 1 & 0 & 3\,\sigma & 2\,\tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3\,\sigma & 2\,\tau \end{vmatrix} = 0 \tag{123}$$

oder, ausgerechnet und geordnet,

$$16(x^2 - y^2 - 1 + xyz)^3 + 27(xy - z)^2(x^2 + y^2)^2 = 0. \tag{124}$$

Die zweite Brennfläche $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ des Systems Σ der Komplextangenten des Paraboloids $\Pi_{1/2}$ ist also eine algebraische Fläche 9. Ordnung.

Schreibt man mit den Abkürzungen

$$A = x^2 - y^2 - 1 + xyz,\ B = xy - z,\ C = x^2 + y^2 \qquad (125)$$

für (124)

$$16\,A^3 + 27\,B^2\,C^2 = 0, \qquad (126)$$

so folgt, daß *die Fläche* $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ *ihre Schnittlinien mit dem Paraboloid* $\Pi_{1/2}$ $(B=0)$ *und dem Minimalebenenpaar* $C = 0$ *als singuläre Linien (Rückkehrlinien) besitzt.*

Die *eigentliche Schnittlinie* der beiden Brennflächen $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ und $\Pi_{1/2}$ besteht dabei wegen

$$x^2 - y^2 - 1 + xyz = (x^2 - 1)(y^2 + 1) - xy(xy - z) \qquad (127)$$

aus dem *windschiefen Vierseit* der Bahntangenten der Punkte $P_1(1, 0, 0)$, $P_2(-1, 0, 0)$, $P_3(0, i, 0)$, $P_4(0, -i, 0)$, welche auf $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ *singuläre Schmieglinien* sind und von ihren beiden konjugierten Scharen von Komplexkurven $k_{-1/2}$ $(\beta=\text{const})$ und $k_{3/2}$ $(\alpha=\text{const})$ eingehüllt werden. Die Flächen $\Pi_{1/2}$ und $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ berühren sich längs dieser *vier geraden Rückkehrkanten* und haben außerdem noch die beiden *Ferngeraden* der Ebenen $x = 0$ und $y = 0$ gemeinsam, in denen sich je drei Mäntel von $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ schneiden, wobei einer dieser Mäntel längs dieser Geraden die Fernebene berührt. Der Gesamtschnitt von $\Pi_{1/2}$ und $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ hat damit die Ordnung $3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 18 = 2 \cdot 9$, wie es sein muß.

Die *Tangentenebenen* π der (selbstdualen) Komplexfläche (Brennfläche) $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ bilden nach Satz 17 eine *Komplexmannigfaltigkeit* $\Pi^*_{3/2,\,-1/2}$ mit der Darstellung

$$v + iu = \frac{(1 + i\alpha)^{3/2}}{(1 + i\beta)^{1/2}},\quad w = -\,{}^3/_2\,\alpha + {}^1/_2\,\beta, \qquad (128)$$

die, wenn man in (124) $P(x, y, z)$ durch $\pi(v, u, -w)$ ersetzt, (d. h. auf die Punkte P von $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ das Polarsystem $\mathfrak{P}$ des Paraboloids $\Pi_{1/2}$ anwendet), auf die *Ebenengleichung der* in dem Polarsystem $\mathfrak{P}$ von $\Pi_{1/2}$ autopolaren *zweiten Brennfläche* $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ des Strahlsystems Σ führt, welche so lautet:

$$16(v^2 - u^2 - 1 - uvw)^3 + 27(uv + w)^2(u^2 + v^2)^2 = 0. \qquad (129)$$

Die der zweiten Brennfläche $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ von Σ *umschriebenen Komplextorsen* $k^*_{3/2}$ $(\beta=\text{const})$ besitzen als Gratlinien $k_{1/2}$ die Komplexkurven des Paraboloids $\Pi_{1/2}$; die Erzeugenden der Komplextorsen $k^*_{3/2}$ bilden dabei das gemeinsame Tangentensystem der beiden Brennflächen $\Pi_{1/2}$ und $\Pi_{-1/2,\,3/2}$ der Kongruenz Σ.

Über eine Klasse von auflösbaren Gruppen

Von

Franz Ferschl und **Wilfried Nöbauer**, Wien

(*Eingegangen am 25. Januar 1958*)

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit den Gruppen, die man erhält, wenn man im Restklassenring $\Gamma[x] \mid (p^e)$ — wo Γ der Ring der ganzen rationalen Zahlen und p eine Primzahl ist — als Verknüpfung die Operation „Einsetzen" einführt, in der so erhaltenen Halbgruppe die Unterhalbgruppe aller Elemente mit einem Vertreterpolynom der Gestalt

$$f(x) = a_0 + a_1 x + p^r a_2 x^2 + (p^r)^2 a_3 x^3 + \ldots + (p^r)^{n-1} a_n x^n$$

bildet und aus dieser alle invertierbaren Elemente nimmt. Wir bezeichnen diese Gruppen mit $\mathfrak{G}(p, e, r)$; sie sind alle endlich und auflösbar, ihre Ordnung ist $(p-1)\, p^T$ und sie sind zerfallende Erweiterungen ihrer p-Sylowgruppe $\mathfrak{S}(p, e, r)$. In einer früheren Arbeit ([3]) wurden auf ähnliche Art gebildete Gruppen betrachtet, bloß wurde damals statt vom Ideal (p^e) von dem Ideal $\{p^e\}$ der Restpolynome mod p^e ausgegangen; die so erhaltenen Gruppen $\mathfrak{G}\{p, e, r\}$ sind stets homomorphe Bilder von $\mathfrak{G}(p, e, r)$; wie wir zeigen werden, ist der Kern des Homomorphismus $\mathfrak{G}(p, e, r) \to \mathfrak{G}\{p, e, r\}$ eine abelsche Gruppe.

Die Struktur der Gruppen $\mathfrak{G}(p, e, r)$ scheint wesentlich komplizierter zu sein, als wir zunächst erwartet hatten und wir konnten nur wenige Ergebnisse darüber erhalten. Wir haben uns im zweiten Teil dieser Arbeit daher auf „zweigliedrige" Gruppen $\mathfrak{G}(p, e, r)$ beschränkt, das sind Gruppen, bei denen jedes Element ein Polynom von höchstens zweitem Grad, aber nicht jedes Element ein lineares Polynom als Vertreter besitzt; wir berechnen in diesem Fall vor allem die absteigende Kommutatorfolge, die ab- und die aufsteigende Zentralfolge und die Frattini-Gruppe von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ und $\mathfrak{S}(p, e, r)$ sowie die maximalen Untergruppen von $\mathfrak{S}(p, e, r)$. Inwieweit sich die verwendeten Methoden auf den allgemeinen Fall übertragen lassen, können wir vorläufig noch nicht sagen.

I. Definition und allgemeine Eigenschaften der Gruppen

Es sei p eine Primzahl und r eine natürliche Zahl. Mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir die Menge aller ganzzahligen Polynome von der Gestalt

$$f(x) = a_0 + a_1 x + p^r a_2 x^2 + \ldots + (p^r)^{\nu-1} a_\nu x^\nu + \ldots + (p^r)^{n-1} a_n x^n.$$

Mit $f_1(x) \in \mathfrak{F}$ und $f_2(x) \in \mathfrak{F}$ gilt auch $f_1(f_2(x)) \in \mathfrak{F}$, wie in [3] gezeigt wurde, wegen $x \in \mathfrak{F}$ ist also $\mathfrak{F}$ eine Unterhalbgruppe mit Einheit in der Halbgruppe, die von allen ganzzahligen Polynomen gegenüber der Operation „Einsetzen" gebildet wird.

Es sei (p^e) das von der Zahl p^e mit $e \geqq 1$ erzeugte Hauptideal im ganzzahligen Polynomring $\Gamma[x]$. Wie in [4] gezeigt wurde, ist (p^e) ein „Vollideal", das heißt:

Wenn

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &\equiv g_1(x) \bmod (p^e) \\ f_2(x) &\equiv g_2(x) \bmod (p^e) \end{aligned}\right\} \rightarrow f_1(f_2(x)) \equiv g_1(g_2(x)) \bmod (p^e)$$

Daraus folgt, wenn $\overline{f(x)}$ jeweils die durch $f(x)$ vertretene Restklasse mod (p^e) bedeutet, daß durch

$$\overline{f(x)} \circ \overline{g(x)} = \overline{f(g(x))}$$

eine eindeutige Verknüpfung $\circ$ in $\Gamma[x] \mid (p^e)$ erklärt wird. Ersichtlich bildet $\Gamma[x] \mid (p^e)$ für diese Verknüpfung eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Einheit. Alle die Elemente von $\mathfrak{H}$, welche ein Polynom aus $\mathfrak{F}$ als Vertreter enthalten, bilden ersichtlich eine Unterhalbgruppe $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ mit Einheit, die invertierbaren Elemente von $\mathfrak{K}$ bilden daher eine Gruppe, welche wir mit $\mathfrak{G}(p, e, r)$ bezeichnen. Diese Gruppe ist der Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen.

Wir wollen zunächst ein genaues Vertretersystem für die Gruppe $\mathfrak{G}(p, e, r)$ aufsuchen: Es sei $F \in \mathfrak{G}(p, e, r)$ und $f(x) \in \mathfrak{F}$ Vertreter für F. Es gibt dann $g(x) \in \mathfrak{F}$ mit

$$f(g(x)) \equiv g(f(x)) \equiv x \bmod (p^e).$$

Es gilt daher:

$$g'(f(x))\, f'(x) \equiv 1 \bmod (p^e)$$

also

$$g'(f(0))\, f'(0) \equiv 1 \bmod p \rightarrow f'(0) = a_1 \not\equiv 0 \bmod p.$$

Wenn umgekehrt für $f(x) \in \mathfrak{F}$ gilt $a_1 \not\equiv 0 \bmod p$, so gibt es in $\overline{f(x)} = F$ ersichtlich auch ein $f_1(x) = \Sigma b_\nu x^\nu$ mit Koeffizienten b_ν, für welche gilt $0 \leqq b_\nu < p^e$ sowie auch

$$b_1 \not\equiv 0 \bmod p \qquad b_\nu \equiv 0 \bmod p \text{ für } \nu \geqq 2.$$

Wie in [4] gezeigt wurde, ist daher F in $\mathfrak{H}$ invertierbar, das heißt, es gibt $G \in \mathfrak{H}$, so daß gilt $FG = GF = E$ und weiter

$$F^k G^k = (FG)^k = E.$$

Nun enthält aber $\mathfrak{R}$ nur endlich viele Elemente, wie leicht zu erkennen ist, daher können die Potenzen F, F^2 ... nicht alle verschieden sein, es gilt also

$$F^k = F^l \text{ mit } k < l$$

daraus erhält man durch Multiplikation mit G^k

$$F^{l-k} = E$$

also besitzt F auch ein Inverses F^{l-k-1} in $\mathfrak{R}$, das heißt:

$$F \in \mathfrak{G}(p, e, r).$$

Wir haben damit bewiesen:

Satz 1: *Ein Polynom $f(x) \in \mathfrak{F}$ ist dann und nur dann Vertreter eines Elementes aus $\mathfrak{G}(p, e, r)$, wenn $a_1 \not\equiv 0 \bmod p$ ist.*

Aus Satz 1 ergibt sich sogleich

Satz 2: *Man erhält ein genaues Vertretersystem für $\mathfrak{G}(p, e, r)$, wenn man in*

$$f(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (p^r)^{\nu-1} a_\nu x^\nu \tag{1}$$

die Koeffizienten in folgenden Grenzen variieren läßt:

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \leqq a_0 < p^e & \\ 0 \leqq a_1 < p^e & a_1 \not\equiv 0 \bmod p \\ 0 \leqq a_\nu < p^{e-r(\nu-1)} & \text{für } \nu \geqq 2 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Wie sich später zeigen wird, ist es oft zweckmäßig, ein anderes Vertretersystem für $\mathfrak{G}(p, e, r)$ als das in Satz 2 aufgestellte zu verwenden. Um dieses zu erhalten, setzen wir

$$r_0(x) = 1 \qquad r_\nu(x) = \prod_{i=0}^{\nu-1} (x - i) \text{ für } \nu \geqq 1$$

dann gilt

Satz 2a: *Man erhält ein genaues Vertretersystem für $\mathfrak{G}(p, e, r)$ auch, wenn man in*

$$g(x) = u_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (p^r)^{\nu-1} u_\nu r_\nu(x) \tag{3}$$

die Koeffizienten u_ν die bei (2) angegebenen Werte durchlaufen läßt.

Beweis: Jedes Polynom $f(x) \in \mathfrak{F}$ läßt sich auch schreiben in der Form (3), wie man durch vollständige Induktion nach dem Grad $[f]$ von $f(x)$ leicht erkennt. Es gibt daher zu jedem $f(x)$ von Satz 2 ein $g(x)$ von der Form (3) mit $g(x) \equiv f(x) \bmod (p^e)$, dessen Koeffizienten u_ν in den bei (2) angegebenen Grenzen liegen. Für dieses gilt natürlich auch $g(x) \equiv f(x) \bmod (p)$, woraus man $u_1 \equiv a_1 \not\equiv 0 \bmod p$ erhält. Daher besitzt jedes $F \in \mathfrak{G}(p, e, r)$ einen Vertreter aus dem System von Satz 2a. Nun enthält dieses System aber genau so viele Polynome wie das System von Satz 2, daher ist es auch ein genaues Vertretersystem für $\mathfrak{G}(p, e, r)$.

Als Gliederzahl λ der Gruppe $\mathfrak{G}(p, e, r)$ definieren wir $\max [f]$, wo $f(x)$ alle Polynome des Vertretersystems von Satz 2 durchläuft. λ ist ersichtlich festgelegt durch die Ungleichungen:

$$e - r(\lambda - 1) > 0 \qquad e - r\lambda \leqq 0$$

das heißt:

$$\lambda = [e/r]_n, \text{ die nächstgrößere ganze Zahl zu } e/r.$$

Die Ordnung o von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ ergibt sich sogleich durch Abzählen der Polynome des Vertretersystems von Satz 2. Durch Anwendung der Summenformel für die arithmetische Reihe erhält man:

$$o = (p-1)\, p^T \text{ mit } T = \frac{1}{2}\,[2e - (\lambda - 1)\, r]\, \lambda + e - 1$$

Wir bezeichnen wie bisher die Restklasse von $f(x) \bmod (p^e)$ mit $\overline{f(x)}$; mit $\overline{\overline{f(x)}}$ bezeichnen wir die Restklasse von $f(x) \bmod (p^d)$, wo $0 < d \leqq e$. Es gilt dann folgender

Satz 3: Die durch $\vartheta\, \overline{f(x)} = \overline{\overline{f(x)}}$ *definierte Abbildung* ϑ *ist ein Homomorphismus von* $\mathfrak{G}(p, e, r)$ *auf* $\mathfrak{G}(p, d, r)$.

Beweis: Da aus $\overline{f(x)} = \overline{g(x)}$ auch $\overline{\overline{f(x)}} = \overline{g(x)}$ folgt, ist ϑ wegen Satz 1 eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ in $\mathfrak{G}(p, d, r)$ und nach Definition der Verknüpfung in diesen beiden Gruppen ist ϑ eine homomorphe Abbildung. Ist aber $\overline{\overline{f(x)}} \in \mathfrak{G}(p, d, r)$ mit $f(x) \in \mathfrak{F}$ gegeben, so gilt wegen Satz 1 auch $\overline{f(x)} \in \mathfrak{G}(p, e, r)$, daher ist ϑ eine Abbildung auf $\mathfrak{G}(p, d, r)$.

Mit Hilfe dieses Satzes beweisen wir nun

Satz 4: Die Gruppe $\mathfrak{G}(p, e, r)$ *besitzt genau eine p-Sylowgruppe* $\mathfrak{S}(p, e, r)$. *Ihre Restklassen werden durch eine zyklische Gruppe* $\mathfrak{Z}_{p-1}$ *repräsentiert, und ihre Vertreter sind in den Vertretersystemen von Satz 2 bzw. Satz 2a durch* $a_1 \equiv 1 \bmod p$ *bzw. durch* $u_1 \equiv 1 \bmod p$ *gekennzeichnet.*

Beweis: Wir betrachten den in Satz 3 definierten Homomorphismus ϑ von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ auf $\mathfrak{G}(p, 1, r)$. Aus Satz 2 ergibt sich, daß $\mathfrak{G}(p, 1, r)$

vertreten wird durch die Polynome $a_0+a_1 x$ mit $0 \leqq a_0 < p$, $0 < a_1 < p$, es ist also $\mathfrak{G}(p, 1, r)$ die eindimensionale lineare Gruppe mod p. Bekanntlich bilden in dieser Gruppe die Elemente mit einem Vertreter der Form $a_0 + x$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$, nach dem zweiten Isomorphiesatz ist daher die Menge aller $F \in \mathfrak{G}(p, e, r)$ mit $\vartheta F \in \mathfrak{N}$ ein Normalteiler $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}(p, e, r)$. Notwendig und hinreichend für $\vartheta F \in \mathfrak{N}$ ist aber, daß der Vertreter von F nach Satz 2 bzw. Satz 2a die Bedingung $a_1 \equiv 1 \bmod p$ bzw. $u_1 \equiv 1 \bmod p$ erfüllt; $\mathfrak{S}$ ist also vom Index $p-1$ und daher p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}(p, e, r)$. Für $p > 2$ sei g eine Primitivwurzel mod p^e; es bilden dann die Elemente $\overline{g^{p^{e-1}\nu} x}$ eine zyklische Untergruppe $\mathfrak{Z}_{p-1}$ von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ und diese ist ein Repräsentantensystem für die Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{S}$.

Folgerung aus Satz 4: $\mathfrak{G}(p, e, r)$ *ist stets auflösbar.*

Mit $\{p^e\}$ bezeichnen wir das Ideal der Restpolynome mod p^e in $\Gamma[x]$. Auch $\{p^e\}$ ist Vollideal (vergleiche [4]), wir können daher genau so, wie wir es für (p^e) gemacht haben, eine Gruppe $\mathfrak{G}\{p, e, r\}$ definieren; diese Gruppe besteht also aus den invertierbaren Elementen in der Unterhalbgruppe von $\Gamma[x] \mid \{p^e\}$, die aus den Restklassen mit einem Vertreter in $\mathfrak{F}$ gebildet wird.

Wenn wir mit $\overline{\overline{f(x)}}$ jetzt die Restklasse von $f(x)$ mod $\{p^e\}$ bezeichnen, dann gilt:

Satz 5: *Die durch* $\varkappa \overline{f(x)} = \overline{\overline{f(x)}}$ *definierte Abbildung* $\varkappa$ *bildet* $\mathfrak{G}(p, e, r)$ *homomorph ab auf* $\mathfrak{G}\{p, e, r\}$.

Beweis: Wegen $(p^e) \subseteq \{p^e\}$ ist $\varkappa \overline{f(x)}$ durch $\overline{f(x)}$ eindeutig bestimmt und gehört, wie sofort zu erkennen, zu $\mathfrak{G}\{p, e, r\}$. Nach Definition der Verknüpfung in den beiden Gruppen ist $\varkappa$ eine homomorphe Abbildung. Es sei $\overline{f(x)} \in \mathfrak{G}\{p, e, r\}$ mit $f(x) \in \mathfrak{F}$ gegeben; es gibt dann $g(x) \in \mathfrak{F}$, so daß $g(f(x)) \equiv x \bmod \{p^e\}$, also $g(f(x)) \equiv x \bmod \{p\}$. Ist

$$f(x) = a_0 + \Sigma (p^r)^{\nu-1} a_\nu x^\nu \qquad g(x) = b_0 + \Sigma (p^r)^{\nu-1} b_\nu x^\nu$$

so gilt also:

$$b_0 + b_1(a_0 + a_1 x) \equiv x \bmod \{p\} \to b_1 a_1 \equiv 1 \bmod p$$

also gilt $a_1 \not\equiv 0 \bmod p$ und daher $\overline{f(x)} \in \mathfrak{G}(p, e, r)$; $\varkappa$ ist also eine Abbildung auf $\mathfrak{G}\{p, e, r\}$.

Den Kern des Homomorphismus $\varkappa$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}(p, e, r)$. Die Struktur dieses Kernes läßt sich ohne große Schwierigkeiten feststellen und wir wollen dies jetzt durchführen. Wir beweisen zunächst

Satz 6: Man erhält ein genaues Vertretersystem für $\mathfrak{R}(p, e, r)$, *wenn man in*

$$k(x) = x + \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu p^{\max(r(\nu-1),\, e-\varepsilon(\nu))} r_\nu(x) \tag{4}$$

die Koeffizienten c_ν *in folgenden Grenzen variieren läßt:*

$$0 \leqq c_\nu < p^{\min(e-r(\nu-1),\, \varepsilon(\nu))}$$

Dabei ist $\varepsilon(0) = 0$, $\varepsilon(\nu)$ *die in* $\nu!$ *enthaltene Potenz von* p *und* $p^u = 1$ *zu setzen für* $u \leqq 0$.

Beweis: Es sei $g(x)$ aus (3) mit den Koeffizienten u_ν Vertreter eines Elementes von $\mathfrak{R}(p, e, r)$, dann gilt $g(x) \equiv x \bmod \{p^e\}$, daher ist $k(x) = g(x) - x$ Restpolynom mod p^e. Aus $k(0) \equiv 0 \bmod p^e$ ergibt sich $u_0 \equiv 0 \bmod p^e$, aus $k(1) \equiv 0 \bmod p^e$ ergibt sich $u_1 - 1 \equiv 0 \bmod p^e$ und so weiterschließend erkennt man, daß gilt:

$$(p^r)^{\nu-1} u_\nu \equiv 0 \bmod p^{e-\varepsilon(\nu)}$$

Es gilt also:

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ (p^r)^{\nu-1} u_\nu = c_\nu p^{\max(r(\nu-1),\, e-\varepsilon(\nu))} \text{ für } \nu > 1.$$

Aus $0 \leqq (p^r)^{\nu-1} u_\nu < p^e$ folgt aber $0 \leqq c_\nu < p^{\min(e-r(\nu-1),\, \varepsilon(\nu))}$, denn es ist ja doch

$$\max(r(\nu-1), e-\varepsilon(\nu)) + \min(e-r(\nu-1), \varepsilon(\nu)) = e \tag{5}$$

Also ist $g(x)$ tatsächlich eines von den in Satz 6 angegebenen Polynomen.

Umgekehrt sind alle $k(x)$ von Satz 6 in dem Vertretersystem von Satz 2a enthalten, vertreten also lauter verschiedene Elemente von $\mathfrak{G}(p, e, r)$, und da $r_\nu(x)$ stets Restpolynom mod $p^{\varepsilon(\nu)}$ ist, vertritt jedes $k(x)$ ein Element von $\mathfrak{R}(p, e, r)$.

Es gilt nun aber stets

$$\min(e-r(\nu-1), \varepsilon(\nu)) \leqq \frac{e}{2}. \tag{6}$$

Wäre nämlich $\min(e-r(\nu-1), \varepsilon(\nu)) > \frac{e}{2}$ für $\nu \geqq 1$, so hieße das:

$$\varepsilon(\nu) > \frac{e}{2} \qquad r(\nu-1) < \frac{e}{2} \qquad \text{also } \varepsilon(\nu) > r(\nu-1)$$

Es würde also gelten $\varepsilon(\nu) \geqq \nu$. Nun ist aber doch (man vergleiche etwa [1], Seite 60)

$$\varepsilon(\nu) = \frac{\nu - s_\nu}{p-1} \leqq \nu - s_\nu < \nu \tag{7}$$

wo s_ν die p-adische Ziffernsumme von ν ist. Daher ist (6) richtig — in trivialer Weise auch für $\nu = 0$ — und wegen (5) gilt also:

$$\max(r(\nu-1), e-\varepsilon(\nu)) \geqq \frac{e}{2} \text{ für } \nu = 0, 1, 2 \ldots \tag{8}$$

Setzen wir nun $[e/2]_n = \varrho$, so können wir also jedes Polynom $k(x)$ des Vertretersystemes von Satz 6 schreiben in der Form

$$k(x) = x + p^\varrho\, l(x).$$

Sind dann

$$k_1(x) = x + p^\varrho\, l_1(x) \qquad k_2(x) = x + p^\varrho\, l_2(x)$$

die Vertreter von Satz 6 für die beiden Elemente F_1, F_2 aus $\mathfrak{R}(p, e, r)$, so wird $F_1 F_2$ vertreten durch

$$k_1(k_2(x)) = x + p^\varrho l_2(x) + p^\varrho l_1(x + p^\varrho l_2(x)) \equiv x + p^\varrho l_1(x) + p^\varrho l_2(x) \bmod (p^e)$$

Es sei

$$p^\varrho\, l_1(x) = \Sigma\, c_\nu\, p^{\max(r(\nu-1),\, e-\varepsilon(\nu))}\, r_\nu(x)$$

$$p^\varrho\, l_2(x) = \Sigma\, \bar{c}_\nu\, p^{\max(r(\nu-1),\, e-\varepsilon(\nu))}\, r_\nu(x)$$

dann ist also der Vertreter von Satz 6 für $F_1 F_2$ wegen (5) gegeben durch

$$k_3(x) = x + \Sigma\, d_\nu\, p^{\max(r(\nu-1),\, e-\varepsilon(\nu))}\, r_\nu(x)$$

mit

$$d_\nu \equiv c_\nu + \bar{c}_\nu \bmod p^{\min(e-r(\nu-1),\, \varepsilon(\nu))}.$$

Also gilt

Satz 7: $\mathfrak{R}(p, e, r)$ *ist eine abelsche p-Gruppe vom Typus*

$$(\ldots\, p^{\min(e-r(\nu-1),\, \varepsilon(\nu))}\, \ldots)$$

wobei ν *alle nichtnegativen ganzen Zahlen durchläuft.*

Selbstverständlich sind nur endlich viele der Invarianten von $\mathfrak{R}(p, e, r)$ von 1 verschieden.

Als Anwendung von Satz 7 wollen wir noch feststellen, wann gilt:

$$\mathfrak{G}(p, e, r) \cong \mathfrak{G}\{p, e, r\} \tag{9}$$

Dafür ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{R}(p, e, r)$ die Ordnung 1 hat, das heißt, daß gilt

$$\min(e - r(\nu-1), \varepsilon(\nu)) \leqq 0 \qquad \text{für } \nu = 0, 1, 2 \ldots$$

Wegen $\varepsilon(\nu) = 0$ für $\nu < p$ und wegen $\varepsilon(p) = 1$ ist dies gleichbedeutend mit $e - r(p-1) \leqq 0$, es gilt also (9) dann und nur dann, wenn $e \leqq r(p-1)$.

II. Zweigliedrige Gruppen

Die kleinstmögliche Gliederzahl λ, welche eine Gruppe $\mathfrak{G}(p, e, r)$ haben kann, ist 1; $\lambda = 1$ gilt dann und nur dann, wenn $r \geqq e$, und in diesem Fall ist $\mathfrak{G}(p, e, r)$ die eindimensionale lineare Gruppe mod p^e. Bei dieser Gruppe lassen sich die Vertreterkoeffizienten des Produktes zweier Elemente durch einfach gebaute Formeln aus den Vertreterkoeffizienten der Faktoren berechnen, und deshalb verursachen Strukturuntersuchungen hier relativ geringe Schwierigkeiten. Bei größeren Werten von λ jedoch geht die Zusammensetzung zweier Elemente von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ nach sehr komplizierten Formeln vor sich und deshalb gestaltet sich auch die Strukturuntersuchung der Gruppe recht schwierig. Für $\lambda = 2$ lassen sich direkte Rechnungen auf Grund der Zusammensetzungsvorschrift noch mit erträglichem Aufwand durchführen, und wir wollen daher in diesem Fall uns mit der Gruppe $\mathfrak{G}(p, e, r)$ etwas näher beschäftigen, zumal da ja die lineare Gruppe, also der Fall $\lambda = 1$, schon an verschiedenen Stellen in der Literatur behandelt wurde.

Wir betrachten von nun ab also die Gruppen $\mathfrak{G}(p, e, r)$, bei denen $[e/r]_*=2$ ist, also $e/2 \leqq r < e$. Mit $\mathfrak{S}(p, e, r)$ bezeichnen wir so wie früher die p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}(p, e, r)$. Genau für $p = 2$ gilt $\mathfrak{G}(p, e, r) = \mathfrak{S}(p, e, r)$. Der Einfachheit halber werden wir im folgenden bei Kongruenzen mod p^e den Modul weglassen.

Wir brauchen zunächst Vertretersysteme für die Gruppen. Aus Satz 2 bzw. Satz 2a sowie aus Satz 4 ergibt sich:

Man erhält je ein genaues Vertretersystem für $\mathfrak{G}(p, e, r)$, wenn man in

$$f(x) = a_0 + a_1 x + p^r a_2 x^2 \text{ bzw. } g(x) = u_0 + u_1 x + p^r u_2 x(x-1)$$

die Koeffizienten in folgenden Grenzen variieren läßt:

$$\begin{aligned} &0 \leqq a_0, u_0 < p^e \\ &0 \leqq a_1, u_1 < p^e \quad a_1 \not\equiv 0 \bmod p,\ u_1 \not\equiv 0 \bmod p \\ &0 \leqq a_2, u_2 < p^{e-r} \end{aligned}$$

Je ein genaues Vertretersystem für $\mathfrak{S}(p, e, r)$ erhält man, wenn man aus diesen Vertretersystemen die Elemente mit $a_1 \equiv 1$ mod p bzw. mit $u_1 \equiv 1$ mod p auswählt.

Wir wollen das erste Vertretersystem mit (A), das zweite Vertretersystem mit (U) bezeichnen. Der Vertreter aus (A) und der Vertreter aus (U) für ein gegebenes Element $F \in \mathfrak{G}(p, e, r)$ hängen ersichtlich durch folgende Formeln zusammen:

$$\left.\begin{array}{lll} a_0 \equiv u_0 & a_1 \equiv u_1 - p^r u_2 & p^r a_2 \equiv p^r u_2 \\ u_0 \equiv a_0 & u_1 \equiv a_1 + p^r a_2 & p^r u_2 \equiv p^r a_2 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Nun wollen wir die Zusammensetzungsvorschrift in der Gruppe für die beiden Vertretersysteme (A) und (U) aufschreiben. Der Einfachheit halber wollen wir im folgenden dort, wo es zweckmäßig ist, folgende Schreibweise verwenden: Hat $F \in \mathfrak{G}(p, e, r)$ den Vertreter $a_0 + a_1 x + p^r a_2 x^2$ aus (A), so schreiben wir $F = (a_0, a_1, a_2)$; hat aber F den Vertreter $u_0 + u_1 x + p^r u_2 x(x-1)$ aus (U), so schreiben wir $F = [u_0, u_1, u_2]$.

Es sei nun

$$(a_0, a_1, a_2)\ (b_0, b_1, b_2) = (c_0, c_1, c_2)$$

dann gilt, wie man durch Einsetzen des Polynoms mit den Koeffizienten b_i in das Polynom mit den Koeffizienten a_i sofort erkennt:

$$\left.\begin{array}{l} c_0 \equiv a_0 + a_1 b_0 + p^r a_2 b_0^2 \\ c_1 \equiv a_1 b_1 + 2 p^r a_2 b_0 b_1 \\ p^r c_2 \equiv p^r (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) \end{array}\right\} \tag{11}$$

Es sei

$$[u_0, u_1, u_2]\ [v_0, v_1, v_2] = [w_0, w_1, w_2].$$

Rechnet man die beiden Faktoren der linken Seite nach (10) auf das Vertretersystem (A) um, bildet nach (11) ihr Produkt und rechnet dieses wieder um auf (U), so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} w_0 \equiv u_0 + u_1 v_0 + p^r u_2 v_0 (v_0 - 1) \\ w_1 \equiv u_1 v_1 + p^r u_2 v_1 (2 v_0 + v_1 - 1) \\ p^r w_2 \equiv p^r (u_1 v_2 + u_2 v_1^2) \end{array}\right\} \tag{11a}$$

Mit $| e_0, e_1, e_2 |$ bezeichnen wir den Komplex aller der Elemente aus $\mathfrak{G}(p, e, r)$, deren (A)-Vertreter die Bedingungen

$$a_0 \equiv 0 \bmod p^{e_0} \qquad a_1 \equiv 1 \bmod p^{e_1} \qquad a_2 \equiv 0 \bmod p^{e_2}$$

erfüllen, mit $\{e_0, e_1, e_2\}$ den Komplex aller der Elemente, deren (U)-Vertreter die Bedingungen

$$u_0 \equiv 0 \bmod p^{e_0} \qquad u_1 \equiv 1 \bmod p^{e_1} \qquad u_2 \equiv 0 \bmod p^{e_2}$$

erfüllen. Es gilt dann insbesondere:

$$\mathfrak{S}(p, e, r) = | 0, 1, 0 | = \{0, 1, 0\}$$

Aus den Formeln (11) bzw. (11a) kann man leicht feststellen, unter welchen Bedingungen so ein Komplex eine Untergruppe ist, und zwar gilt:

Der Komplex $| e_0, e_1, e_2 |$ *bzw.* $\{e_0, e_1, e_2\}$ *ist dann und nur dann Untergruppe von* $\mathfrak{G}(p, e, r)$, *wenn gilt*:

$$\varepsilon(2) + r + e_0 + e_2 \geqq \min(e_1, e) \tag{12}$$

Ist nämlich (12) erfüllt, so liegt das Produkt je zweier Elemente aus so einem Komplex wieder darin, und umgekehrt folgt daraus, daß $(p^{e_0}, 1, p^{e_2})^2$ bzw. $[p^{e_0}, 1, p^{e_2}]^2$ wieder im Komplex liegen muß, das Erfülltsein von (12).

Ist $| e_0, e_1, e_2 |$ bzw. $\{e_0, e_1, e_2\}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}(p, e, r)$, dann gilt, wie man sofort sieht:

$$\begin{gathered} | e_0, e_1, e_2 | = | e_0, e, e - r | \; | e, e_1, e - r | \; | e, e, e_2 | \\ \{e_0, e_1, e_2\} = \{e_0, e, e - r\} \{e, e_1, e - r\} \{e, e, e_2\} \end{gathered} \tag{13}$$

Die rechtsstehenden Faktoren sind hier auch alle Untergruppen, und zwar ist

$| e_0, e, e - r | = \{e_0, e, e - r\}$ die Menge aller Elemente von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ mit einem (A)-Vertreter $k p^{e_0} + x$

$| e, e_1, e - r | = \{e, e_1, e - r\}$ die Menge aller Elemente von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ mit einem (A)-Vertreter $(1 + k p^{e_1})\, x$

$| e, e, e_2 |$ die Menge aller Elemente von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ mit einem (A)-Vertreter $x + p^r k p^{e_2} x^2$

$\{e, e, e_2\}$ die Menge aller Elemente von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ mit einem (U)-Vertreter $x + p^r k p^{e_2} x(x - 1)$.

Wir wollen nun einige Kommutatoren berechnen, die wir später brauchen werden. Es erweist sich hier als zweckmäßig, Elemente durch ihren (A)-Vertreter zu bezeichnen. In dieser Bezeichnungsweise sind die Kommutatoren K_1, K_2, K_3, die wir benötigen, gegeben durch

$$\begin{aligned} K_1 &= (a_0 + a_1 x + p^r a_2 x^2,\ \alpha + x) \\ K_2 &= (\beta x,\ a_0 + a_1 x + p^r a_2 x^2) \\ K_3 &= (x + p^r \gamma x^2,\ a_0 + a_1 x + p^r a_2 x^2). \end{aligned}$$

Am leichtesten erhält man diese Kommutatoren durch unbestimmten Ansatz: Ist $K = (A, B)$, so erfüllt K die Gleichung

$$K B A = A B. \tag{14}$$

Wenn man hier die linke und die rechte Seite nach (11) berechnet, so erhält man drei in den Koeffizienten von K lineare Beziehungen, aus denen man diese Koeffizienten leicht berechnen kann.

Wir setzen:

$$K_1 = (x_0, x_1, x_2) \qquad K_2 = (y_0, y_1, y_2) \qquad K_3 = (z_0, z_1, z_2)$$

dann ergeben sich aus dem Abastz (14) die Beziehungen:

$$\begin{aligned} x_0 + (\alpha + a_0)\, x_1 + \quad & p^r(\alpha + a_0)^2\, x_2 \quad \equiv a_0 + a_1\, \alpha + p^r\, a_2\, \alpha^2 \\ a_1\, x_1 + 2\, & p^r(\alpha + a_0)\, a_1\, x_2 \equiv a_1 + 2\, p^r\, a_2\, \alpha \\ p^r\, a_2\, x_1 + \quad & p^r\, a_1^2\, x_2 \quad\quad \equiv p^r\, a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y_0 + a_0\, y_1 + p^r\, a_0^2\, y_2 \quad \equiv \beta\, a_0 \\ & \beta\, a_1\, y_1 + 2\, p^r\, \beta\, a_0\, a_1\, y_2 \equiv \beta\, a_1 \\ & p^r\, \beta^2\, a_2\, y_1 + p^r\, \beta^2\, a_1^2\, y_2 \equiv p^r\, \beta\, a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & z_0 + a_0\, z_1 + p^r\, a_0^2\, z_2 \quad \equiv a_0 + p^r\, a_0^2\, \gamma \\ & a_1\, z_1 + 2\, p^r\, a_0\, a_1\, z_2 \quad \equiv a_1 + 2\, p^r\, a_0\, a_1\, \gamma \\ & p^r(a_1\, \gamma + a_2)\, z_1 + p^r\, a_1^2\, z_2 \equiv p^r\, a_2 + p^r\, \gamma\, a_1^2. \end{aligned}$$

Diese Systeme werden am besten gelöst, indem man jeweils zuerst aus der zweiten Kongruenz x_1 bzw. y_1 bzw. z_1 berechnet und in die dritte Kongruenz einsetzt. So erhält man folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &\equiv (a_1 - 1)\, \alpha + p^r\, a_2\, \alpha[\alpha - 2\, a_1^{-1}(a_0 + \alpha)] \\ x_1 &\equiv 1 + 2\, p^r\, a_2\, a_1^{-1}\, \alpha \\ p^r\, x_2 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \tag{15a}$$

$$\left.\begin{aligned} y_0 &\equiv a_0(\beta - 1)\,(1 - p^r\, a_0\, a_2\, a_1^{-2}\, \beta^{-1}) \\ y_1 &\equiv 1 + 2\, p^r\, a_0\, a_2\, a_1^{-2}\, \beta^{-1}(\beta - 1) \\ p^r\, y_2 &\equiv -\, p^r\, a_2\, a_1^{-2}\, \beta^{-1}(\beta - 1) \end{aligned}\right\} \tag{15b}$$

$$\left.\begin{aligned} z_0 &\equiv -\, p^r\, a_0^2\, a_1^{-1}\, \gamma \\ z_1 &\equiv 1 + 2\, p^r\, a_0\, a_1^{-1}\, \gamma \\ p^r\, z_2 &\equiv p^r(1 - a_1^{-1})\, \gamma \end{aligned}\right\} \tag{15c}$$

Weiter werden wir auch noch die Kommutatoren L_1, L_2, L_3 brauchen, welche gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} L_1 &= (u_0 + u_1\, x + p^r\, u_2\, x(x - 1),\ \alpha + x) \\ L_2 &= (\beta\, x,\ u_0 + u_1\, x + p^r\, u_2\, x(x - 1)) \\ L_3 &= (x + p^r\, \gamma\, x^2,\ u_0 + u_1\, x + p^r\, u_2\, x(x - 1)) \end{aligned}$$

Wir setzen:

$$L_1 = [\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2] \qquad L_2 = [\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2] \qquad L_3 = [\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2]$$

Man erhält die $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{z}_i$ wohl am einfachsten, indem man zuerst $u_0 + u_1\, x + p^r\, u_2\, x(x - 1)$ nach (10) auf das Vertretersystem (A) umrechnet, dann nach (15) jeweils den Kommutator berechnet und diesen nach (10) wieder auf (U) zurücktransformiert. So ergibt sich nach leichter Rechnung, wenn man beachtet, daß $(u_1 - p^r\, u_2)^{-1} \equiv u_1^{-1}(1 + p^r\, u_2\, u_1^{-1})$ ist:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_0 &\equiv (u_1 - 1)\,\alpha + p^r u_2\,\alpha[\alpha - 1 - 2\,u_1^{-1}(u_0 + \alpha)] \\ \bar{x}_1 &\equiv 1 + 2\,p^r u_2 u_1^{-1}\,\alpha \\ p^r\,\bar{x}_2 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (16a)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_0 &\equiv u_0(\beta - 1)\,(1 - p^r u_0 u_2 u_1^{-2}\beta^{-1}) \\ \bar{y}_1 &\equiv 1 + p^r(2u_0 - 1)\,u_2 u_1^{-2}\beta^{-1}(\beta - 1) \\ p^r\,\bar{y}_2 &\equiv -\,p^r u_2 u_1^{-2}\beta^{-1}(\beta - 1) \end{aligned}\right\} \quad (16b)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{z}_0 &\equiv -\,p^r u_0^2 u_1^{-1}\gamma \\ \bar{z}_1 &\equiv 1 + p^r\gamma(1 + u_1^{-1}(2u_0 - 1)) \\ p^r\,\bar{z}_2 &\equiv p^r(1 - u_1^{-1})\,\gamma \end{aligned}\right\} \quad (16c)$$

Nun wollen wir die absteigenden Kommutatorfolgen von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ und $\mathfrak{S}(p, e, r)$ und damit auch die Stufe dieser Gruppen berechnen. Wir beginnen mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(p, e, r)$ und können wegen $\mathfrak{G}(2, e, r) = \mathfrak{S}(2, e, r)$ annehmen, daß $p > 2$ ist.

Die Zuordnung

$$(a_0, a_1, a_2) \to a_1 \bmod p^r$$

ist wegen (11) ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf die prime Restklassengruppe mod p^r, die wir mit $\mathfrak{P}_{p^r}$ bezeichnen wollen, also auf eine abelsche Gruppe, für dessen Kern $\mathfrak{K} = |\,0, r, 0\,|$ gilt also $\mathfrak{K} \supseteq \mathfrak{G}'$. Andererseits haben wir aber nach (13)

$$|\,0, r, 0\,| = |\,0, e, e - r\,|\;|\,e, r, e - r\,|\;|\,e, e, 0\,| \qquad (17)$$

Wenn wir in (15a) setzen $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, so erhalten wir $|\,0, e, e - r\,| \subseteq \mathfrak{G}'$; in (15b) setzen wir $a_0 = 0, \beta = 2, a_2 = -\,2\lambda a_1^2$, daraus folgt $|\,e, e, 0\,| \subseteq \mathfrak{G}'$; in (15c) setzen wir $a_1 = 1$, $a_0 = 2^{-1}$, das ergibt zusammen mit $|\,0, e, e - r\,| \subseteq \mathfrak{G}'$, daß auch $|\,e, r, e - r\,| \subseteq \mathfrak{G}'$. Also gilt $\mathfrak{G}' = |\,0, r, 0\,|$.

Bei der Berechnung der weiteren Glieder der Folge und bei der Berechnung der Kommutatorfolge von $\mathfrak{S}(p, e, r)$ verwenden wir genau denselben Gedankengang, weshalb wir uns kurz fassen können:

$$(a_0, a_1, a_2) \to (a_0 \bmod p^r,\; a_2 \bmod p^{e-r})$$

ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}'$ auf das direkte Produkt $\mathfrak{Z}_{p^r} \times \mathfrak{Z}_{p^{e-r}}$ der additiven Gruppen der Restklassenringe mod p^r und mod p^{e-r} mit dem Kern $\mathfrak{K} = |\,r, r, e - r\,| = |\,r, r, r\,|$ wegen $r \geqq e - r$. Analog wie vorhin erkennt man durch geeignete Wahl der a_i in den Formeln (15), daß gilt

$$\mathfrak{G}'' = \mathfrak{K} = |\,r, r, r\,|$$

Aus (11) sieht man, daß für je zwei Elemente $A, B \in \mathfrak{G}''$ gilt $AB = BA$,

daher ist $\mathfrak{G}''' = E$ und wir erhalten also folgende absteigende Kommutatorfolge für $\mathfrak{G}(p, e, r)$:

$$| 0, 0, 0 | \supset | 0, r, 0 | \supset | r, r, r | \supset | e, e, e |$$

Zur Berechnung der Kommutatorfolge von $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(p, e, r)$ gehen wir aus von der Abbildung:

$$(a_0, a_1, a_2) \to (a_0 \bmod p, a_1 \bmod p^{r+\varepsilon(2)}, a_2 \bmod p)$$

die nach (11) ein Homomorphismus von $\mathfrak{S}$ in das direkte Produkt $\mathfrak{Z}_p \times \mathfrak{P}_{p^{r+\varepsilon(2)}} \times \mathfrak{Z}_p$ ist mit dem Kern $\mathfrak{K} = | 1, r + \varepsilon(2), 1 |$. Wie oben ergibt sich $\mathfrak{S}' = \mathfrak{K}$. Die Abbildung

$$(a_0, a_1, a_2) \to (a_0 \bmod p^{\min(e, r+\varepsilon(2)+1)}, a_1 \bmod p^{\min(e, r+\varepsilon(2)+2)}, a_2 \bmod p^{e-r})$$

ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{S}'$ in

$$\mathfrak{Z}_{p^{\min(e, r+\varepsilon(2)+1)}} \times \mathfrak{P}_{p^{\min(e, r+\varepsilon(2)+2)}} \times \mathfrak{Z}_{p^{e-r}}$$

mit dem Kern $| r + \varepsilon(2) + 1, r + \varepsilon(2) + 2, e - r | = \mathfrak{S}''$, was man so wie früher einsieht, und wegen $\mathfrak{G}''' = E$ gilt auch $\mathfrak{S}''' = E$, so daß wir als absteigende Kommutatorfolge für $\mathfrak{S}(p, e, r)$ erhalten:

$$| 0, 1, 0 | \supset | 1, r+\varepsilon(2), 1 | \supset | r+\varepsilon(2)+1, r+\varepsilon(2)+2, e-r | \supseteq | e, e, e |$$

Hier sind das dritte und vierte Glied dann und nur dann gleich, wenn $r + \varepsilon(2) + 1 \geqq e$ ist, so daß wir also den folgenden Satz aussprechen können:

Satz 8: Für $\lambda = 2$ beträgt die Stufe von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ stets 3; die Stufe von $\mathfrak{S}(p, e, r)$ ist 2 für die Gruppen $\mathfrak{S}(p, e, e-1)$ und $\mathfrak{S}(2, e, e-2)$, sonst ist sie auch 3.

Als nächstes beschäftigen wir uns mit den absteigenden Zentralfolgen von $\mathfrak{G}(p, e, r)$ und $\mathfrak{S}(p, e, r)$.

Zunächst berechnen wir $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$ für $p > 2$. Wir wissen schon, daß gilt $\mathfrak{G}' = | 0, r, 0 |$. In (15a) setzen wir nun $a_1 = 2$, $a_2 = 0$ und erhalten $| 0, e, e - r | \subseteq (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$; in (15b) setzen wir $\beta = 2$, $a_0 = 0$, $a_2 = -2\lambda a_1^2$ und erhalten $| e, e, 0 | \subseteq (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$; in (15c) setzen wir $a_1 = 1 + p^r$, $a_0 = 2^{-1}$ und daraus folgt wegen $| 0, e, e - r | \subseteq (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$, daß auch die Beziehung $| e, r, e - r | \subseteq (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$ gilt, wegen (17) gilt also $\mathfrak{G}' = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}')$, das heißt:

Für $p > 2$ ist $\mathfrak{G}(p, e, r)$ nicht nilpotent und hat $| 0, r, 0 |$ als Potenz.

Zur Berechnung der absteigenden Zentralfolge der nilpotenten Gruppe $\mathfrak{S}(p, e, r)$ verwenden wir folgenden

Hilfssatz: Es sei $\mathfrak{T} = | e_0, e_1, e_2 |$ ein Komplex aus $\mathfrak{S}$, für den gilt:

$$e_2 \geqq \min(e_0, e_1) \tag{18}$$

Es gilt dann für den Kommutator $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ *die Beziehung*:

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = |\min(e_0 + 1, e_1), \min(e_0, e_1) + r + \varepsilon(2), \min(e_1, e_2 + 1)| \tag{19}$$

und auch $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ *erfüllt die dem* (18) *entsprechende Ungleichung.*

Beweis: Angenommen, der durch (19) gegebene Komplex würde diese Ungleichung nicht erfüllen, dann müßte gelten:

$$\min(e_1, e_2 + 1) < \min(e_0 + 1, e_1)$$

$$\min(e_1, e_2 + 1) < \min(e_0, e_1) + r + \varepsilon(2)$$

also

$$\min(e_1, e_2 + 1) < \min(e_0 + 1, e_1, e_0 + r + \varepsilon(2), e_1 + r + \varepsilon(2)) = \\ = \min(e_0 + 1, e_1)$$

das heißt, es würde gelten

$$e_2 + 1 < e_0 + 1,\ e_2 + 1 < e_1 \to e_2 < \min(e_0, e_1)$$

im Widerspruch zu (18).

Um die Beziehung (19) zu beweisen, gehen wir so vor: Es gilt jedenfalls

$$\mathfrak{T} \subseteqq |e_0, e, e - r|\ |e, e_1, e - r|\ |e, e, e_2| = \mathfrak{A}_0\, \mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2$$

für $T \in \mathfrak{T}$ gilt also

$$T = A_0\, A_1\, A_2 \text{ mit } A_i \in \mathfrak{A}_i \text{ für } i = 0, 1, 2.$$

Nach einer bekannten Formel für Kommutatoren (siehe etwa [6], Seite 57) gilt daher:

$$(S, T) = (S, A_0\, A_1\, A_2) = (S, A_0)\,(S, A_1\, A_2)^{A_0} = \\ = (S, A_0)\,(S, A_1)^{A_0}\,(S, A_2)^{A_1 A_0}$$

Nun ist aber (vergleiche etwa [5], Seite 78) der Kommutator $(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_i)$ stets Normalteiler des Kompositums $\{\mathfrak{S} \cup \mathfrak{A}_i\} = \mathfrak{S}$, daher erhalten wir

$$(S, T) \in (\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_0)\,(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_1)\,(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_2)$$

wegen der Normalteilereigenschaft der $(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_i)$ also auch

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) \subseteqq (\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_0)\,(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_1)\,(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_2)$$

wegen $\mathfrak{T} \supseteqq \mathfrak{A}_i$ für $i = 0, 1, 2$ gilt also

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = (\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_0)\,(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{S})\,(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}) \tag{20}$$

Nach (15a) gilt nun für jeden Kommutator (S, A_0)

$$(S, A_0) \in |e_0 + 1, \varepsilon(2) + r + e_0, e - r|$$

da der rechtsstehende Komplex (12) erfüllt, haben wir also

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_0) \subseteq | e_0 + 1, \varepsilon(2) + r + e_0, e - r |$$

Indem man in (15a) zunächst setzt $a_1 = 1 + p$, $a_2 = 0$, $\alpha = \lambda p^{e_0}$ und dann $a_1 = 1$, $a_2 = 2^{\varepsilon(2)-1}$, $\alpha = \lambda p^{e_0}$, erkennt man, daß gilt:

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_0) = | e_0 + 1, \varepsilon(2) + r + e_0, e - r | \tag{21}$$

Für jeden Kommutator (A_1, S) gilt nach (15b)

$$(A_1, S) \in | e_1, \varepsilon(2) + r + e_1, e_1 |$$

da der rechte Komplex (12) erfüllt, gilt also wieder

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{S}) \subseteq | e_1, \varepsilon(2) + r + e_1, e_1 |$$

In (15b) setzen wir nun zunächst $\beta = 1 + \lambda p^{e_1}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1 + p$, $a_2 = 0$, dann $\beta = 1 + \lambda p^{e_1}$, $a_0 = 0$, $a_2 = -a_1^2 \beta$ und schließlich noch $\beta = 1 + \lambda p^{e_1}$, $a_0 = 1$, $a_2 = 2^{\varepsilon(2)-1} a_1^2 \beta$; so erkennt man, daß gilt:

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{S}) = | e_1, \varepsilon(2) + r + e_1, e_1 | \tag{22}$$

Für $(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_0)(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{S})$ erhalten wir aus (21) und (22) wegen (11) zunächst: $(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_0)(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{S}) \subseteq | \min(e_0 + 1, e_1), \min(\varepsilon(2) + r + e_0, \varepsilon(2) + r + e_1), e_1 |$ da der linksstehende Komplex aber eine Gruppe ist, gilt sogar

$$(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}_0)(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{S}) = | \min(e_0 + 1, e_1), \min(e_0, e_1) + r + \varepsilon(2), e_1 | \tag{23}$$

Für jeden Kommutator (A_2, S) gilt nach (15c)

$$(A_2, S) \in | r + e_2, \varepsilon(2) + r + e_2, e_2 + 1 |$$

da der rechte Komplex (12) erfüllt, gilt also:

$$(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}) \subseteq | r + e_2, \varepsilon(2) + r + e_2, e_2 + 1) | \tag{24}$$

Wäre $r + e_2 < e_0 + 1$ und $r + e_2 < e_1$, so wäre $e_2 < \min(e_0, e_1)$ im Widerspruch zu (18), also gilt $r + e_2 \geqq \min(e_0 + 1, e_1)$ und $\varepsilon(2) + r + e_2 \geqq \min(e_0, e_1) + r + \varepsilon(2)$, daher erhält man wegen (11) aus (23) und (24)
$(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) \subseteq | \min(e_0 + 1, e_1), \min(e_0, e_1) + r + \varepsilon(2), \min(e_1, e_2 + 1) |$. Wenn man in (15c) setzt $\gamma = \lambda p^{e_2}$, $a_0 = 0$, $a_1 = (1 - p)^{-1}$, erhält man $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{S}) \supseteq | e, e, e_2 + 1 |$, da $(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ eine Gruppe ist, gilt also tatsächlich (19).

Da $\mathfrak{S} = | 0, 1, 0 |$ die Bedingung (18) wirklich erfüllt, liefert also wiederholte Anwendung von (19) die absteigende Zentralfolge von $\mathfrak{S}$. Wir haben hier drei verschiedene Fälle zu betrachten:

1. $p > 2$, $r > 1$

$| 0, 1, 0 | \supset | 1, r, 1 | \supset | 2, r + 1, 2 | \supset \ldots \supset | \nu, r + \nu - 1, \nu | \supset \ldots \supset | e, e, e |$

2. $p > 2$, $r = 1$ also $e = 2$

$$|0, 1, 0| \supset |1, 1, 1| \supset |1, 2, 1| \supset |2, 2, 2|$$

3. $p = 2$

$$|0,1,0| \supset |1,r+1,1| \supset |2,r+2,2| \supset \ldots \supset |\nu, r+\nu, \nu| \supset \ldots \supset |e,e,e|$$

wir haben also folgenden

Satz 9: Für $\lambda = 2$ ist e die Klasse von $\mathfrak{S}(p, e, r)$; eine Ausnahme ist der Fall $p > 2$, $r = 1$; hier ist die Klasse $e + 1$.

Nun wollen wir die aufsteigenden Zentralfolgen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{S}$ bestimmen. Für $p > 2$ ergibt sich daraus, daß ein Zentrumselement $a_0 + a_1 x + p^r a_2 x^2$ von $\mathfrak{G}$ mit den Elementen $2x$ und $x + 1$ vertauschbar sein muß, aus (15b) und (15a) sogleich: $a_0 = a_2 = 0$, $a_1 = 1$, also haben wir:

Für $p > 2$ hat $\mathfrak{G}(p, e, r)$ kein Zentrum.

Um die aufsteigende Zentralfolge von $\mathfrak{S}$ zu erhalten, beweisen wir zunächst folgenden

Hilfssatz: Ist $\mathfrak{V} = \{f_0, f_1, f_2\}$ ein Normalteiler aus $\mathfrak{G}$, für welchen gilt

$$f_1 - r \leqq f_0 \leqq f_1 \qquad f_2 + \varepsilon(2) \leqq f_1 \leqq f_2 + r + \varepsilon(2) \tag{25}$$

so ist der Kommutatorquotient $\mathfrak{V} \div \mathfrak{S}$ gegeben durch

$$\mathfrak{V} \div \mathfrak{S} = \{\max(f_0-1, f_1-r-\varepsilon(2)), \max(f_0, f_2), \max(f_1-r-\varepsilon(2), f_2-1)\} \tag{26}$$

auch dieser Komplex erfüllt die dem (25) entsprechenden Ungleichungen und ist Normalteiler in $\mathfrak{G}$.

Beweis: Setzen wir für die rechte Seite von (26) zur Abkürzung $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$, so erhalten wir aus (25)

$$\varphi_1 > f_0 - 1,\ \varphi_1 \geqq f_2 \geqq f_1 - r - \varepsilon(2) \to \varphi_1 \geqq \varphi_0$$

$$\varphi_0 + r \geqq f_0,\ \varphi_0 + r \geqq f_1 - \varepsilon(2) \geqq f_2 \to \varphi_0 \geqq \varphi_1 - r$$

$$\varphi_2 + r + \varepsilon(2) \geqq f_1 \geqq f_0,$$

$$\varphi_2 + r + \varepsilon(2) \geqq f_2 - 1 + r + \varepsilon(2) \geqq f_2 \to \varphi_2 + r + \varepsilon(2) \geqq \varphi_1$$

$$\varphi_1 - \varepsilon(2) \geqq f_0 - \varepsilon(2) \geqq f_1 - r - \varepsilon(2),$$

$$\varphi_1 - \varepsilon(2) \geqq f_2 - \varepsilon(2) \geqq f_2 - 1 \to \varphi_1 \geqq \varphi_2 + \varepsilon(2)$$

also sind die dem (25) entsprechenden Ungleichungen erfüllt.

Nach Definition des Kommutatorquotienten ist $\mathfrak{V} \div \mathfrak{S}$ die Menge aller $U \in \mathfrak{G}$, für welche $(S, U) \in \mathfrak{V}$ für jedes $S \in \mathfrak{S}$, also die Menge aller $U \in \mathfrak{G}$, für welche gilt

$$S\,\mathfrak{B}\,U\,\mathfrak{B} = U\,\mathfrak{B}\,S\,\mathfrak{B} \text{ für jedes } S \in \mathfrak{S} \tag{27}$$

Wegen $\mathfrak{S} = |\,0, e, e-r\,|\;|\,e, 1, e-r\,|\;|\,e, e, 0\,| = \mathfrak{B}_0\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2$ und weil $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_2$ ersichtlich zyklisch mit erzeugendem Element $1+x$ bzw. $x + p^r x^2$ sind, gilt also genau dann $U \in \mathfrak{B} \div \mathfrak{S}$, wenn

$$(U, 1+x) \in \mathfrak{B} \qquad (\beta x, U) \in \mathfrak{B} \text{ für } \beta \equiv 1 \bmod p \qquad (U, x + p^r x^2) \in \mathfrak{B} \tag{28}$$

Aus den Formeln (16) erhält man nun als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß (28) durch $U = [u_0, u_1, u_2]$ erfüllt wird:

$$u_1 - 1 - 2\,p^r\,u_2\,u_1^{-1}(u_0+1) \equiv 0 \bmod p^{f_0} \tag{29}$$

$$2\,p^r\,u_2 \equiv 0 \bmod p^{f_1} \tag{30}$$

$$u_0\,p \equiv 0 \bmod p^{f_0} \tag{31}$$

$$p^r(2\,u_0 - 1)\,u_2\,p \equiv 0 \bmod p^{f_1} \tag{32}$$

$$u_2\,p \equiv 0 \bmod p^{f_2} \tag{33}$$

$$p^r\,u_0^2 \equiv 0 \bmod p^{f_0} \tag{34}$$

$$p^r(1 + u_1^{-1}(2\,u_0 - 1)) \equiv 0 \bmod p^{f_1} \tag{35}$$

$$1 - u_1^{-1} \equiv 0 \bmod p^{f_2} \tag{36}$$

Aus (30), (31) und (33) erhält man

$$u_2 \equiv 0 \bmod p^{f_1 - r - \varepsilon(2)} \qquad u_0 \equiv 0 \bmod p^{f_0 - 1} \qquad u_2 \equiv 0 \bmod p^{f_2 - 1}$$

(34) folgt aus (31) und (36) ergibt $u_1 \equiv 1 \bmod p^{f_2}$. Wegen $f_1 \geqq f_0$ ergibt sich aus (29) daher $u_1 \equiv 1 \bmod p^{f_0}$, wegen $f_1 - r - \varepsilon(2) + r + 1 \geqq f_1$ ist (32) eine Folgerung aus den übrigen Bedingungen, und (35) schließlich ist gleichbedeutend mit

$$u_1 - 1 \equiv -\,2\,u_0 \bmod p^{f_1 - r}$$

wegen $u_1 \equiv 1 \bmod p^{f_0}$ und $f_0 \geqq f_1 - r$ folgt daraus $u_0 \equiv 0 \bmod p^{f_1 - r - \varepsilon(2)}$, so daß sich also folgende notwendige Bedingungen ergeben:

$$u_0 \equiv 0 \bmod p^{\max(f_0 - 1,\, f_1 - r - \varepsilon(2))}$$

$$u_1 \equiv 1 \bmod p^{\max(f_0,\, f_2)}$$

$$u_2 \equiv 0 \bmod p^{\max(f_1 - r - \varepsilon(2),\, f_2 - 1)}$$

wie leicht zu erkennen ist, sind sie auch hinreichend für das Erfülltsein von (29) bis (36).

Da der Kommutatorquotient zweier Normalteiler von $\mathfrak{G}$ wieder Normalteiler ist (siehe [5], Seite 80), ist der Hilfssatz damit bewiesen.

Die Glieder $\mathfrak{Z}_\nu$ der aufsteigenden Zentralfolge von $\mathfrak{S}$ erhält man nun durch die rekursiven Bedingungen

$$\mathfrak{Z}_0 = \{e, e, e-r\} \qquad \mathfrak{Z}_{\nu+1} = (\mathfrak{Z}_\nu \div \mathfrak{S}) \cap \mathfrak{S}$$

Da $\mathfrak{Z}_0$ die Bedingung (25) erfüllt und Normalteiler in $\mathfrak{G}$ ist, können wir unseren Hilfssatz anwenden. Dabei müssen wir dieselbe Fallunterscheidung wie bei der absteigenden Zentralfolge machen:

1. $p > 2,\ r > 1$

$$\{e, e, e-r\} \subset \{e-1, e, e-r\} \subset \{e-2, e-1, e-r\} \subset \ldots$$
$$\subset \ldots \subset \{e-\nu, e-\nu+1, e-r-\nu+2\} \subset \ldots \subset \{0, 1, 0\}$$

2. $p > 2,\ r = 1$, also $e = 2$

$$\{2, 2, 1\} \subset \{1, 2, 1\} \subset \{1, 1, 1\} \subset \{0, 1, 0\}$$

3. $p = 2$

$$\{e, e, e-r\} \subset \{e-1, e, e-r-1\} \subset \{e-2, e-1, e-r-1\} \subset \ldots$$
$$\subset \ldots \subset \{e-\nu, e-\nu+1, e-r-\nu+1\} \subset \ldots \subset \{0, 1, 0\}.$$

Als nächstes wollen wir die Frattini-Gruppen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{S}$ berechnen. Wir beginnen hier mit $\mathfrak{S}$: Da $\mathfrak{S}$ eine p-Gruppe ist, ist jede maximale Untergruppe von $\mathfrak{S}$ Normalteiler und hat den Index p (siehe etwa [6], Seite 105), daher enthält die Frattini-Gruppe $\Phi(\mathfrak{S})$ die p-ten Potenzen aller Elemente von $\mathfrak{S}$, insbesondere also die Menge der Elemente $\lambda p + x$, also $|\, 1, e, e-r \,|$, die Menge der Elemente $x + p^r \lambda p x^2$, also $|\, e, e, 1 \,|$, sowie die Menge der Elemente $(1 + \mu p)^p x$; aus bekannten Sätzen über die Struktur der primen Restklassengruppe mod p^e (siehe etwa [1]) ergibt sich leicht, daß diese Menge der Komplex $|\, e, 2 + \varepsilon(2), e-r \,|$ ist. Wegen (13) gilt also

$$\Phi(\mathfrak{S}) \supseteq |\, 1, 2 + \varepsilon(2), 1 \,| \tag{37}$$

Da die Φ-Gruppe einer p-Gruppe stets die Kommutatorgruppe enthält, gilt nach früheren Resultaten auch noch:

$$\Phi(\mathfrak{S}) \supseteq |\, 1, r + \varepsilon(2), 1 \,| \tag{38}$$

Um die Φ-Gruppe auch nach oben einzuschränken, wählen wir geeignete maximale Untergruppen von $\mathfrak{S}$ und bestimmen ihren Durchschnitt. Zunächst sind die Komplexe $\mathfrak{M}_1 = |\, 1, 1, 0 \,|$ und $\mathfrak{M}_2 = |\, 0, 1, 1 \,|$ stets maximale Untergruppen, denn sie erfüllen (12) und haben den Index p in $\mathfrak{S}$. Für $p > 2,\ r = 1$ gilt wegen (38) also $\Phi = |\, 1, 1, 1 \,|$. In den übrigen Fällen ist auch $\mathfrak{M}_3 = |\, 0, 2, 0 \,|$ maximale Untergruppe, aus (37) erhalten wir also $\Phi = |\, 1, 2, 1 \,|$ für $p > 2,\ r > 1$ und aus (38) ergibt sich $\Phi = |\, 1, 2, 1 \,|$ für $p = 2,\ r = 1$. Im Falle $p = 2,\ r > 1$ ist

auch die Menge der Elemente $a_0 + a_1 x + p^r a_2 x^2$ mit $a_1 \equiv \pm 1 \bmod 8$ eine maximale Untergruppe $\mathfrak{M}_4$, wie aus (11) gleich zu erkennen ist, wegen (37) gilt also $\Phi = |\, 1, 3, 1 \,|$.

Wir können die verschiedenen Fälle in einer einheitlichen Formel zusammenfassen und folgenden Satz aussprechen:

Satz 10: *Die Frattini-Gruppen von* $\mathfrak{G}(p, e, r)$ *und* $\mathfrak{S}(p, e, r)$ *sind für* $\lambda = 2$ *gegeben durch*

$$\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{S}) = |\, 1, \min(r, 2) + \varepsilon(2), 1 \,|.$$

Wir müssen noch zeigen, daß $\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{S})$. Dazu benützen wir folgenden Satz von Huppert ([2]): Ist $\mathfrak{G}'$ nilpotent, dann ist die q-Sylowgruppe der Frattini-Gruppe $\Phi(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ der Durchschnitt der Frattini-Gruppen aller q-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$.

Wie wir wissen, ist in unserem Fall $\mathfrak{G}'$ eine p-Gruppe, also nilpotent, wir können daher den Satz anwenden und brauchen dann bloß noch das direkte Produkt der q-Sylowgruppen Φ_q von $\Phi(\mathfrak{G})$ zu bilden, um $\Phi(\mathfrak{G})$ zu erhalten, denn $\Phi(\mathfrak{G})$ ist ja nilpotent.

Für $q = p$ ist $\mathfrak{S}$ die einzige Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, also ist $\Phi_q = \Phi\ (\mathfrak{S})$. Wie wir uns beim Beweis von Satz 4 überlegt haben, hat $\mathfrak{G}$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung $p - 1$ aus Elementen der Form αx, daher besitzt $\mathfrak{G}$ für $q \mid p - 1$ auch stets eine q-Sylowgruppe aus Elementen αx. Der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ aller q-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$, mit $\alpha x = A \in \mathfrak{D}$ gilt also auch $B^{-1} A B \in \mathfrak{D}$. Für $B = 1 + x$ erhält man $B^{-1} A B = \alpha - 1 + \alpha x$, daraus folgt $\alpha = 1$, also $\mathfrak{D} = x$. Wegen $\Phi_q \subseteq \mathfrak{D}$ gilt also auch $\Phi_q = x$, also $\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{S})$.

Die Kenntnis von $\Phi(\mathfrak{S})$ gestattet uns, alle maximalen Untergruppen von $\mathfrak{S}$ anzugeben. Da nämlich eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den maximalen Untergruppen von $\mathfrak{S}$ und denen von $\mathfrak{S} \mid \Phi(\mathfrak{S})$ besteht und letztere Gruppe elementar abelsch ist, gilt nach der bekannten Formel für die Anzahl der Untergruppen gegebener Ordnung einer elementar abelschen Gruppe für die Anzahl z der maximalen Untergruppen von $\mathfrak{S}$:

a) $z = p + 1$ für $p > 2, r = 1$

b) $z = p^2 + p + 1$ für $p > 2, r > 1$

c) $z = 7$ für $p = 2, r = 1$

d) $z = 15$ für $p = 2, r > 1$

Wir ordnen nun jedem ganzzahligen Vektor $\mathfrak{k} \not\equiv \mathfrak{o} \bmod p$ in diesen vier Fällen auf folgende Art einen Komplex $\mathfrak{M}(\mathfrak{k}) \subseteq \mathfrak{S}$ zu:

a) $\mathfrak{k} = (\lambda, \mu)$

$\mathfrak{M}(\mathfrak{k})$ sei die Menge aller Elemente $(b_0, 1 + p\, b_1, b_2) \subseteq \mathfrak{S}$, für welche gilt:

$$\lambda\, b_0 + \mu\, b_2 \equiv 0 \bmod p \tag{39a}$$

b) und c) $\mathfrak{k} = (\lambda, \mu, \nu)$

$\mathfrak{M}(\mathfrak{k})$ sei die Menge aller Elemente $(b_0, 1 + p\, b_1, b_2) \subseteq \mathfrak{S}$, für welche gilt:

$$\lambda\, b_0 + \mu\, b_1 + \nu\, b_2 \equiv 0 \bmod p \tag{39b}$$

d) $\mathfrak{k} = (\lambda, \mu, \nu, \pi)$

$\mathfrak{M}(\mathfrak{k})$ sei die Menge aller Elemente $(b_0, (-1)^{b_1}(1 + 4\,\bar{b}_1), b_2) \subseteq \mathfrak{S}$ mit

$$\lambda\, b_0 + \mu\, b_1 + \nu\, \bar{b}_1 + \pi\, b_2 \equiv 0 \bmod 2 \tag{39d}$$

Aus (11) erkennt man leicht, daß mit je zwei Elementen aus $\mathfrak{S}$ auch ihr Produkt die entsprechende Beziehung (39) erfüllt, also ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{k})$ stets Untergruppe von $\mathfrak{S}$, und zwar Untergruppe vom Index p, also maximale Untergruppe.

Wir müssen nun noch feststellen, wann gilt $\mathfrak{M}(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{M}(\mathfrak{k}_2)$. Wenn das der Fall ist, dann hat das System der mit $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ gebildeten Kongruenzen (39) genau so viele Lösungen mod p wie die mit $\mathfrak{k}_1$ allein gebildete Kongruenz, das System hat also den Rang 1 und es gilt $\mathfrak{k}_2 \equiv \lambda\, \mathfrak{k}_1 \bmod p$ mit $\lambda \not\equiv 0 \bmod p$; umgekehrt folgt daraus natürlich wieder $\mathfrak{M}(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{M}(\mathfrak{k}_2)$. Die Anzahl der verschiedenen $\mathfrak{M}(\mathfrak{k})$ ist daher gleich der Anzahl der Vektoren $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{o}$, deren erste nichtverschwindende Komponente 1 ist und für deren übrige Komponenten a_i gilt $0 \leqq a_i < p$, hat also in den vier Fällen folgenden Wert:

a) $p + 1$ b) $p^2 + p + 1$ c) 7 d) 15.

Daher sind die $\mathfrak{M}(\mathfrak{k})$ in jedem Fall alle maximalen Untergruppen von $\mathfrak{S}$.

Literatur

[1] *Hasse H.*, Vorlesungen über Zahlentheorie, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.

[2] *Huppert B.*, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Math. Z. **60**, 409—434 (1953).

[3] *Nöbauer W.*, Eine Verallgemeinerung der eindimensionalen linearen Gruppe mod *n*. Mh. Math. **60**, 249—256 (1956).

[4] *Nöbauer W.*, Über die Operation des Einsetzens in Polynomringen. Math. Ann. **134**, 248—259 (1958).

[5] *Specht W.*, Gruppentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

[6] *Zassenhaus H.*, Lehrbuch der Gruppentheorie. Leipzig und Berlin 1937.

Untersuchungen über Fréchet-Räume

Von

Josef Roppert, Wien

(Eingegangen am 12. Februar 1958)

Eine Menge K heißt ein *Fréchet-* oder (V)-*Raum*, wenn man jedem Element $p \in K$ eine Klasse $\mathfrak{U}_p$ von Teilmengen U_p zuordnen kann. Die $U_p \in \mathfrak{U}_p$ sollen *Umgebungen* des Elementes (oder Punktes) p genannt werden. Weiter wird nichts über die Umgebungen vorausgesetzt. Es sei E eine Teilmenge von K; dann ist die Ableitung E' der Menge E definiert als die Menge aller Elemente p, für die gilt:

$$(U_p - p)\, E \neq 0 \tag{1}$$

für alle Umgebungen des Elementes p, also für alle $U \in \mathfrak{U}_p$. Man kennt folgende Regeln (vgl. etwa *Sierpinski* [4])

$$(0)' = 0 \tag{2}$$

$$\text{aus } K \supset A \supset B \text{ folgt } A' \supset B' \tag{3}$$

$$\text{aus } a \in A' \text{ folgt } a \in (A - a)'. \tag{4}$$

Zwei (V)-Räume mit den gleichen Mengen heißen topologisch äquivalent, wenn die Ableitung einer Menge in dem einen Raum mit der Ableitung derselben Menge im andern Raum übereinstimmt. Man sieht sofort, daß jeder (V)-Raum mit einem andern ihm topologisch äquivalenten (V)-Raum verbunden werden kann, indem man jeder Umgebung U_p des Elementes p das Element p hinzufügt und die so gebildeten neuen Mengen als Umgebungen von p definiert. Im neuen Raum gilt also, daß jedes Element in allen seinen Umgebungen enthalten ist. Wir können dies ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiterhin annehmen.

Es gilt das Hausdorff'sche Äquivalenzkriterium: Zwei Räume mit denselben Elementen sind genau dann topologisch äquivalent, wenn es zu jeder Umgebung U_p eines Elementes p im ersten Raum eine Umgebung V_p desselben Elementes p im andern Raum gibt, so daß $U_p \subset V_p$

gilt und umgekehrt. Wir suchen die Menge $H(E)$ aller Elemente p, für deren sämtliche Umgebungen U_p gilt: $U_p E \neq 0$ wobei $E \subset K$ ist und behaupten:

Satz 1: *Es ist* $H(E) = E + E'$.

Beweis: 1. Es sei $p \in H(E)$. Dann gilt entweder für alle U_p von p: $U_p E - p \neq 0$; dann ist $p \in E'$; oder für ein U_p von p: $U_p E - p = 0$, jedoch $U_p E \neq 0$; daraus folgt sofort $E \supset U_p E = p$, also $p \in E + E'$ und wir haben $H(E) \subset E' + E$.

2. Sei $p \in E + E'$. Ist $p \in E$, so folgt $U_p E \ni p$ (wegen $p \in U_p$) für alle U_p von p und $p \in H(E)$. Ist $p \in E'$, so gilt sogar $U_p E - p \neq 0$ für alle U_p von p, also wieder $p \in H(E)$. Daraus folgt $H(E) \supset E + E'$ und daraus die Behauptung.

Es sei eine Folge von Teilmengen (E_i) eines (V)-Raumes gegeben. Wir definieren den *oberen topologischen Limes* in Zeichen lim sup E_i, bzw. den *unteren topologischen Limes*, in Zeichen lim inf E_i der Folge E_i wie folgt:

Definition: $p \in \liminf E_i$ genau dann, wenn es zu jeder Umgebung U_p von p eine natürliche Zahl n gibt, so daß für alle $i \geqq n$ gilt: $U_p E_i \neq 0$.

Definition: $p \in \limsup E_i$ genau dann, wenn es zu jeder Umgebung U_p von p eine Teilfolge F_i der E_i gibt, so daß für alle i gilt: $U_p F_i \neq 0$.

Es gelten dann die Formeln:

$$\liminf E_i \subset \limsup E_i$$

$$\liminf A_i + \liminf B_i \subset \liminf (A_i + B_i)$$

$$\liminf (A_i B_i) \subset (\liminf A_i)(\liminf B_i)$$

Satz 2: *Es gilt allgemein*

$$\limsup E_i = \prod_{n=1}^{\infty} \{ \sum_{i=n}^{\infty} E_i + (\sum_{i=n}^{\infty} E_i)' \} = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} E_i + \prod_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=n}^{\infty} E_i)'.$$

Hilfssatz: Es ist $p \in \limsup E_i$ genau dann, wenn für alle Umgebungen U_p von p und für jedes $k = 1, 2 \ldots$, gilt: $U_p \sum_{i=k}^{\infty} E_i = 0$.

Die Bedingung ist notwendig: Ist $p \in \limsup E_i$, so gilt für alle U_p von p und für unendlich viele E_i: $U_p E_i \neq 0$; daher gilt die behauptete Gleichung für alle $k = 1, 2, \ldots$. Sie reicht auch hin: sei $U_p \sum_{i=k}^{\infty} E_i \neq 0$ für alle k. Gäbe es nur endlich viele E_i mit $U_p E_i \neq 0$ für ein bestimmtes U_p von p, so gäbe es dann doch einen Index n, so daß $U_p \sum_{i=n}^{\infty} E_i = 0$ wäre,

im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muß es unendlich viele E_i geben mit $U_p E_i \neq 0$ für alle U_p von p, die Bedingung reicht hin und der Hilfssatz ist bewiesen. —

Aus Satz 1 und der Definition von $H(E)$ folgt sofort: es ist $p \in \limsup E_i$ genau dann, wenn gilt:

$$p \in \sum_{i=k}^{\infty} E_i + \left(\sum_{i=k}^{\infty} E_i\right)' \delta$$

für alle $k = 1, 2, \ldots$. Daraus folgt notwendig

$$p \in \prod_{k=1}^{\infty} \left\{\sum_{i=k}^{\infty} E_i + \left(\sum_{i=k}^{\infty} E_i\right)'\right\}.$$

Umgekehrt folgt aus der letzten Gleichung wieder die vorletzte, also reicht die Bedingung auch hin und Satz 2 ist vollständig bewiesen.

Satz 3: Notwendig und hinreichend, daß allgemein in einem (V)-Raum gilt:

$$\limsup A_i + \limsup B_i = \limsup (A_i + B_i) \tag{5}$$

für beliebige Mengenfolgen A_i, B_i, ist, daß allgemein gilt:

$$H(A + B) = H(A) + H(B). \tag{6}$$

Beweis: 1. Es gelte die Gleichung (5) allgemein. Wir setzen sämtliche A_i gleich einer beliebigen Menge A, alle B_i gleich B. Dann ist $A_i = A$, $B_i = B$, sowie $A_i + B_i = A + B$ und es folgt aus Satz 2:

$$\limsup A = \prod_{1}^{\infty} H(A) = H(A), \limsup B = H(B) \text{ und } \limsup (A + B) = H(A + B);$$

aus (5) folgt in der Tat die Gleichung (6).

2. Umgekehrt gelte (6). Wir schreiben das Ergebnis des Satzes 2 in der Form:

$$\limsup E_i = \prod_{n=1}^{\infty} H\left(\sum_{i=n}^{\infty} E_i\right).$$

Dann ist wegen der vorausgesetzten Gültigkeit von (6)

$$\limsup (A_i + B_i) = \prod_{n=1}^{\infty} H\left[\sum_{i=n}^{\infty} (A_i + B_i)\right] = \prod_{n=1}^{\infty} \left[H\left(\sum_{i=n}^{\infty} A_i\right) + H\left(\sum_{i=n}^{\infty} B_i\right)\right] =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} H\left(\sum_{i=n}^{\infty} A_i\right) + \prod_{n=1}^{\infty} H\left(\sum_{i=n}^{\infty} B_i\right) = \limsup A_i + \limsup B_i$$

und der Beweis beendet.

Bemerkung: es gilt im allgemeinen für beliebige Mengen X_i, Y_i nur $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\Pi}}(X_i + Y_i) \supset \overset{\infty}{\underset{i=1}{\Pi}} X_i + \overset{\infty}{\underset{i=1}{\Pi}} Y_i$; gilt aber $X_i \supset X_j$ und $Y_i \supset Y_j$ für $i \leqq j$, so folgt das Gleichheitszeichen. Da $H(\overset{\infty}{\underset{i=n}{\Sigma}} A_i) \supset H(\overset{\infty}{\underset{i=m}{\Sigma}} A_i)$ für $m \geqq n$, so gilt die letzte Gleichung des obigen Beweises in der Tat.

Satz 4: *Es gilt allgemein*

$$\liminf E_i \supset \overset{\infty}{\underset{n=1}{\Sigma}} \overset{\infty}{\underset{i=n}{\Pi}} (E_i + E_i').$$

Beweis: Wir suchen die Menge $L(E_i)$ aller Punkte p, für die gilt: zu jedem $p \in L(E_i)$ gibt es eine natürliche Zahl $n(p)$, so daß für *alle* Umgebungen U_p von p und alle $i \geqq n(p)$ gilt: $U_p E_i \neq 0$. Offenbar ist $L(E_i) \subset \liminf E_i$. Wir zeigen nun:

$$L(E_i) = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\Sigma}} \overset{\infty}{\underset{i=n}{\Pi}} (E_i + E_i').$$

1. Sei $p \in L(E_i)$; dann gibt es ein n, so daß $U_p E_i \neq 0$ für alle $i \geqq n(p)$ und für jedes U_p von p gilt; nach Satz 1 gilt also $p \in E_i + E_i'$ für $i \geqq n(p)$ und folglich

$$p \in \overset{\infty}{\underset{i=n(p)}{\Pi}} (E_i + E_i').$$

2. Sei $p \in \overset{\infty}{\underset{n=1}{\Sigma}} \overset{\infty}{\underset{i=n}{\Pi}} (E_i + E_i')$, dann gibt es ein n, so daß $p \in \overset{\infty}{\underset{i=n}{\Pi}} (E_i + E_i')$ also $p \in E_i + E_i'$ für $i \geqq n$; nach Satz 1 folgt wieder $U_p E_i \neq 0$ für $i \geqq n$ und für alle U_p von p. Also ist $p \in L(E_i)$ und es ist alles bewiesen. —

Eine Menge $E \subset K$ heißt *abgeschlossen*, wenn gilt: $E \supset E'$. Es gilt dann für allgemeine (V)-Räume: Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen. Ist E abgeschlossen und ist F so, daß $E' \subset F \subset E$ gilt, so ist F auch abgeschlossen. Die *abgeschlossene Hülle* $\overline{E}$ der Menge E ist der Durchschnitt aller abgeschlossener Mengen, die E enthalten. Es folgt, daß $\overline{E}$ selbst abgeschlossen ist. Die abgeschlossene Hülle oder kurz Hülle ist also eine Mengenfunktion mit folgenden Eigenschaften:

$$\text{wenn } E = 0, \text{ so } \overline{E} = 0 \text{ und umgekehrt} \tag{7}$$

$$\text{wenn } E \supset F, \text{ so } \overline{E} \supset \overline{F} \tag{8}$$

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E} \tag{9}$$

$$\overline{E} \supset E. \tag{10}$$

Aus (9) folgt sofort $\overline{E} \supset E + E' = H(E)$.

Satz 5: *Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn* $H(E) = E$ *gilt.*
Beweis: 1. Ist $E \supset E'$, so folgt $H(E) = E + E' = E$.

2. Ist $H(E) = E$, so folgt $E + E' = E$ und daraus folgt sofort $E \supset E'$.

Eine Menge heißt *offen*, wenn ihr Komplement $K - E$ abgeschlossen ist. Dann gilt: Eine Menge E ist genau dann offen, wenn es zu jedem ihrer Elemente p mindestens eine Umgebung U_p von p gibt, so daß U_p ganz in E enthalten ist. Das Innere $I(E)$ einer Menge E ist die Vereinigung aller offenen Mengen, die in E enthalten sind. $I(E)$ ist selbst offen, da die Summe beliebig vieler offener Mengen offen ist. Man kann zeigen, daß $I(E) = K - \overline{K - E} \subset E$ gilt. Da wir Mengen betrachten wollen, die sich aus Komplement- und Hüllenbildung aufbauen lassen, führen wir eine Vereinfachung der Schreibweise ein. Es soll E^c das Komplement von E in Bezug auf den Raum K bedeuten, also gelten: $E^c = K - E$. Weiter soll $\overline{E}$ die Hülle von E bedeuten. Man erhält in dieser Schreibweise z. B. für das Innere: $I(E) = E^{c-c}$.

Es erhebt sich nun die Frage: Wieviele Mengen lassen sich nur auf Grund von Hüllen- und Komplementbildung von einer Menge E bilden? Sie wird beantwortet durch

Satz 6: *Diese Zahl ist endlich und beträgt höchstens 14.*

Bemerkung: Das ist von *Kuratowski* [3] unter der Annahme bewiesen worden, daß allgemein gilt: $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$. Wir beweisen das ohne diese Forderung und benützen nur die Eigenschaften (8) bis (10) der abgeschlossenen Hüllen. Der folgende Beweis gilt sogar für allgemeinere Mengenfunktionen, die gewisse Eigenschaften besitzen.

Beweis: Es seien zu jeder Teilmenge E einer beliebigen Menge K zwei Mengenfunktionen E^c und E^- gegeben, die selbst wieder Teilmengen von K sein sollen. Sie sollen die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$E^- \supset E \tag{11}$$

$$E^{--} = E^- \tag{12}$$

$$\text{aus } E \supset F \text{ folgt } E^- \supset F^- \tag{13}$$

$$E^{cc} = E \tag{14}$$

$$\text{aus } E \supset F \text{ folgt } F^c \supset E^c \tag{15}$$

Deutet man E^- als Hülle, E^c als Komplement der Menge E in einem allgemeinen Fréchet-Raum, so sieht man, daß dann die Bedingungen (11) bis (15) sämtlich erfüllt sind.
Aus (a) $E^- \supset E$ folgen der Reihe nach:

(b) $E^{-c} \subset E^c$

(c) $E^{-c-} \subset E^{c-}$

(d) $E^{-c-c} \supset E^{c-c}$

(e) $E^{-c-c-} \supset E^{c-c-}$.

Ersetzt man in den obigen Gleichungen die Menge E durch E^c, so erhält man: (f) $E^{c-} \supset E^c$

(g) $E^{c-c} \subset E$

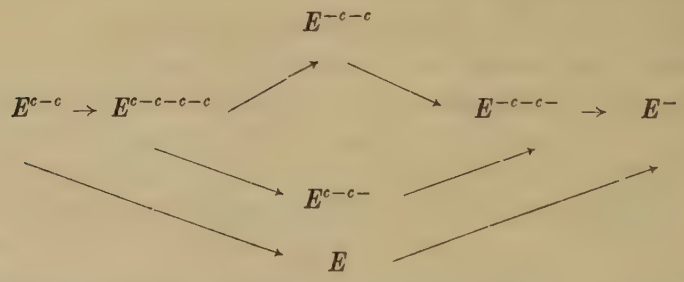
(h) $E^{c-c-} \subset E^-$

(i) $E^{c-c-c} \supset E^{-c}$

(j) $E^{c-c-c-} \supset E^{-c-}$

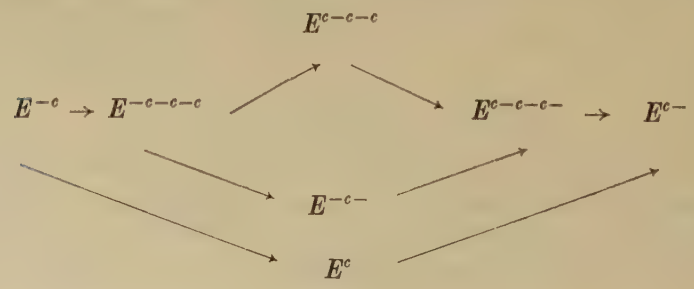
(k) $E^{c-c-c-c} \subset E^{-c-c}$.

Wir ersetzen in (h) die Menge E durch E^- und erhalten wegen (12): $E^- \supset E^{-c-c-}$. Wegen (11) gilt $E^{-c-c-} \supset E^{-c-c}$. Aus (e) folgt $E^{-c-c-} \supset E^{c-c-}$. Wegen k) folgt $E^{-c-c} \supset E^{c-c-c-c}$. Ersetzt man in (g) die Menge E durch die Menge E^{c-c-}, so erhält man $E^{c-c-} \supset E^{c-c-c-c}$. Ersetzt man in (d) die Menge E durch E^{c-c}, so erhält man $E^{c-c-c-c} \supset \supset (E^{c-c})^{c-c} = E^{c-c-c} = E^{c-c}$. Hieraus ergibt sich folgendes Schema:



Hiebei bedeutet $A \to B$, daß A in B enthalten ist. —

Ersetzt man im obigen Schema die Menge E durch E^c, so erhält man ein zweites Schema:



Wir behaupten nun: Das sind alle Mengen, die durch die Operationen E^- und E^c erhalten werden können. Denn aus dem zweiten Schema folgt: $E^{-c-} \subset E^{-c-c-c-} \subset E^{-c-}$, also $E^{-c-} = E^{-c-c-c-}$ und aus dem ersten: $E^{c-c-} \subset E^{c-c-c-c-} \subset E^{c-c-}$, also $E^{c-c-} = E^{c-c-c-c-}$; infolgedessen kann jede Menge, auf die in nicht trivialer Weise mehr als viermal die Operation E^c oder E^- angewendet wurde, auf eine Menge der obigen beiden Schemata zurückgeführt werden. Obige beide Schemata sollen der Kürze halber *Kuratowski'sche Siebenecke* heißen.

Notwendig und hinreichend, daß allgemein in einem (V)-Raum gilt:

$$\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B},$$

ist, daß die Summe zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

Beweis: 1. Seien A und B abgeschlossen. Dann folgt trivial aus $A + B = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A + B}$, daß auch die Summe $A + B$ abgeschlossen ist.

2. Nun sei allgemein die Summe zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Also ist stets für beliebiges A, B auch $\overline{A} + \overline{B}$ abgeschlossen, folglich $\overline{\overline{A} + \overline{B}} = \overline{A} + \overline{B}$. Wie leicht zu sehen, ist $\overline{A + B} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$; es folgt in der Tat $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Satz 7: Notwendig und hinreichend, daß allgemein gilt:

$$\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B} \tag{16}$$

ist, daß gilt:

$$\overline{A - B} \supset \overline{A} - \overline{B}. \tag{17}$$

Beweis: Daß aus Gleichung (16) die Gl. (17) folgt, ist bekannt. Daß aber aus (17) umgekehrt (16) folgt, scheint weniger bekannt zu sein. Es gelte also: $\overline{A - B} \supset \overline{A} - \overline{B}$. Daraus folgt $\overline{A - B} = \overline{A + B - B} \supset \overline{A + B} - \overline{B}$. Weiter gilt: $\overline{A} + \overline{B} \supset \overline{A - B} + \overline{B} \supset (\overline{A + B} - \overline{B}) + \overline{B} = \overline{A + B} + \overline{B} \supset \overline{A + B}$. Nun gilt aber ganz allgemein in Fréchet-Räumen: $\overline{A + B} \supset \overline{A} + \overline{B}$, also $\overline{A} + \overline{B} \supset \overline{A + B} \supset \overline{A} + \overline{B}$ und daraus in der Tat $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Wir betrachten nun den Durchschnitt von zwei Mengen und versuchen etwas über die Hülle des Durchschnitts auszusagen.

Satz 8: Sei allgemein $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$; *dann gilt für beliebige Mengen* A, B:

$$\overline{AB} \supset A^- B^{c-} + A^{-c-} B^{c-c-} + A^{-c-c-} B^{c-c-c-} + A^{-c-} B^{c-c-} + A^{c-c-} B^{-c-c} + \\ + A^{c-c-c-} B^{-c-c-} + A^{c-} B^- + AB. \tag{18}$$

Umgekehrt folgt aus dem Bestehen von (18) die Additivität der Hülle.

Beweis: Aus der Additivität der Hülle folgt für beliebiges A, C:

$$\overline{A - C} \supset \overline{A} - \overline{C}. \tag{19}$$

Wir setzen $C = K - B$, also $B = K - C$, wobei K den betrachteten Gesamtraum bedeutet. Dann ist $A - C = A(K - C) = AB$ und aus (4) folgt: $\overline{AB} \supset \overline{A} - \overline{K - B} = \overline{A}(K - \overline{K - B})$. Offenbar können A und B völlig beliebig angenommen werden. Wir kehren nun zu der unter Satz 6 betrachteten Symbolik zurück. Es ist also $K - \overline{K - B} = B^{c-c} = I(B)$ und wir erhalten $\overline{AB} \supset A^- B^{c-c}$.

Da $\overline{AB}$ symmetrisch in den A und B ist, so gilt etwas allgemeiner:

$$\overline{AB} \supset A^- B^{c-c} + A^{c-c} B^-. \tag{20}$$

Wir bilden die Hülle von (5). Es folgt

$$\overline{\overline{AB}} = \overline{AB} \supset (A^- B^{c-c} + A^{c-c} B^-)^- = (A^- B^{c-c})^- + (A^{c-c} B^-)^- \tag{21}$$

da die Additivität der Hülle vorausgesetzt war. Wir wenden auf die rechte Seite der letzten Gleichungen die Gl. (20) erneut an. Es ist also

$$(A^- B^{c-c})^- \supset (A^-)^- (B^{c-c})^{c-c} + (B^{c-c})^- (A^-)^{c-c} = A^- B^{c-c} + B^{c-c-} A^{-c-c}$$

Analog, indem man einfach in der letzten Gleichung A mit B vertauscht:

$(A^{c-c} B^-)^- \supset A^{c-c} B^- + A^{c-c-} B^{-c-c}$. Setzt man in (21) ein, so erhält man

$$\overline{AB} \supset A^- B^{c-c} + A^{c-c} B^- + A^{c-c-} B^{-c-c} + B^{c-c-} A^{-c-c} \tag{22}$$

Wir wiederholen die Prozedur:

$$\overline{\overline{AB}} = \overline{AB} \supset (A^- B^{c-c})^- + (A^{c-c} B^-)^- + (A^{c-c-} B^{-c-c})^- + (A^{-c-c} B^{c-c-})^-$$

Die ersten beiden Terme rechts wurden schon beim ersten Schritt behandelt. Anwendung von (20) auf die beiden letzten Terme liefert

$$(A^{c-c-} B^{-c-c})^- \supset A^{c-c-} B^{-c-c} + A^{c-c-c-c} B^{-c-c-} \tag{23}$$

und wieder durch Vertauschen $(A^{-c-c} B^{c-c-})^- \supset A^{-c-c} B^{c-c-} + A^{-c-c-} B^{c-c-c-c}$. Weiter ist sicher $\overline{AB} \supset AB$; fügt man die letzten drei Gleichungen noch zu (22) hinzu, so erhält man die erste Behauptung des Satzes. Setzt man umgekehrt Gl. (18) voraus, so folgt daraus sofort wieder die Additivität der Hülle, denn aus (18) folgt $\overline{AB} \supset A^- B^{c-c}$. Setzt man $B = C^c$, so folgt: $\overline{AC^c} \supset \overline{A}(C^c)^{c-c} = A^- C^{-c}$ und das ist nur eine andere Schreibweise der für die Additivität der Hülle notwendigen

und hinreichenden Bedingung $\overline{A - C} \supset \overline{A} - \overline{C}$. Hiemit ist der Satz zur Gänze bewiesen.

Wir zeigen noch, daß eine weitere Anwendung von (20) auf die rechte Seite von (18) nichts Neues bringt. Es ist nämlich

$$(A^{-c-c-}B^{c-c-c-c})^- \supset A^{-c-c-}B^{c-c-c-c} + A^{-c-c-c-c}B^{c-c-c-c-}.$$

Der zweite Term der rechten Seite ist aber (siehe Satz 6) gleich A^{-c-c} B^{c-c-} und dieser Term ist in der Tat schon in (18) enthalten. Ganz analog bringt auch die Anwendung von Formel (18) auf sich selbst nichts Neues. —

Aus der Gleichung (18) folgt nun sofort ein Satz, den *Kuratowski* [2] für topologische Räume bewiesen hat. Wir setzen also nur die Additivität der Hülle voraus, jedoch nicht, daß für endliche Mengen A notwendig $\overline{A} = A$ gilt. Der zu beweisende Satz lautet:

Es gilt unter diesen Voraussetzungen allgemein:

$$(A + B)^{-c-c-} = A^{-c-c-} + B^{-c-c-}.$$

Beweis: Da die Hülle additiv ist, gilt

$$(A + B)^{-c-c-} = (A^- + B^-)^{c-c-} = (A^{-c}B^{-c})^{-c-}.$$

Wir wenden nun die Formel 18) auf $(A^{-c}B^{-c})^-$ an und erhalten

$(A^{-c}B^{-c})^- \supset A^{-c-}B^{-c} + A^{-c}B^{-c-} + A^{-c-c-c}B^{-c-} + A^{-c-}B^{-c-c-c} +$

$+ A^{-c}B^{-c}$. Es folgt durch Komplementbildung

$$(A^{-c}B^{-c})^{-c} \subset (A^{-c-c} + B^-) \cdot (A^- + B^{-c-c}) \cdot (A^{-c-c-} + B^{-c-c}) \cdot$$
$$\cdot (A^{-c-c} + B^{-c-c-}) \cdot (A^- + B^-)$$

oder

$$(A^{-c}B^{-c})^{-c} \subset (A^{-c-c} + B^{-c-c} + A^-B^-) \cdot (A^{-c-c} + B^{-c-c} +$$
$$+ A^{-c-c-}B^{-c-c-})$$

indem man beachtet, daß stets gilt: $A^{-c-c} \subset A^{-c-c-} \subset A^-$ (Satz 6).

Daraus folgt weiter $(A^{-c}B^{-c})^{-c} \subset A^{-c-c} + B^{-c-c} + A^{-c-c-}B^{-c-c-}$ und endlich wegen der Additivität der Hülle

$$(A + B)^{-c-c-} = (A^{-c}B^{-c})^{-c-} \subset A^{-c-c-} + B^{-c-c-} + (A^{-c-c-}B^{-c-c-})^-$$

Nun sind aber die Mengen A^{-c-c-} und B^{-c-c-} abgeschlossen. In allgemeinen V-Räumen gilt aber der Satz, daß der Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen stets abgeschlossen ist. Also gilt

$$(A^{-c-c-}B^{-c-c-})^- = A^{-c-c-}B^{-c-c-}$$

und wir erhalten

$$(A+B)^{-c-c-} \subset A^{-c-c-} + B^{-c-c-} + A^{-c-c-}B^{-c-c-} = A^{-c-c-} + \\ + B^{-c-c-}, \text{ also } (A+B)^{-c-c-} \subset A^{-c-c-} + B^{-c-c-}. \tag{24}$$

Nun folgen durch fortgesetzte Hüllen- und Komplementbildung die Formeln

$$(A+B)^{-} = A^{-} + B^{-}$$
$$(A+B)^{-c} = A^{-c}B^{-c}$$
$$(A+B)^{-c-} = (A^{-c}B^{-c})^{-} \subset A^{-c-}B^{-c-}$$
$$(A+B)^{-c-c} \supset A^{-c-c} + B^{-c-c}$$
$$(A+B)^{-c-c-} \supset (A^{-c-c} + B^{-c-c})^{-} = A^{-c-c-} + B^{-c-c-}.$$

Also in der Tat umgekehrt $(A+B)^{-c-c-} \supset A^{-c-c-} + B^{-c-c-}$. Im Zusammenhang mit (24) folgt

$$(A+B)^{-c-c-} = A^{-c-c-} + B^{-c-c-}, \text{ w.z.b.w.} \tag{25}$$

Korollar: *Aus* $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ *folgt allgemein*: $(AB)^{c-c-c-c} = A^{c-c-c-c}B^{c-c-c-c}$.

Beweis: Wir ersetzen in (25) die Menge A durch A^c, B durch B^c. Es folgt

$$(A^c + B^c)^{-c-c-} = (AB)^{c-c-c-} = A^{c-c-c-} + B^{c-c-c-}$$

und durch Komplementbildung

$$(AB)^{c-c-c-c} = A^{c-c-c-c}B^{c-c-c-c}, \text{ w.z.b.w.}$$

Es ist bekannt, daß aus der Additivität der Hülle folgt, daß das Innere $I(A)$ multitativ ist:

$$I(AB) = (AB)^{c-c} = (A^c + B^c)^{-c} = (A^{c-} + B^{c-})^c = A^{c-c}B^{c-c} = I(A)\,I(B).$$

Wir fragen nach einer hinreichenden Bedingung, daß das Innere $I(A)$ additiv ist.

Definition: Zwei Mengen A, B heißen separiert, wenn gilt:

$$\overline{A}B = A\overline{B} = 0.$$

Satz 9: *Seien A und B separierte Mengen. Dann gilt*:

$$I(A+B) = I(A) + I(B).$$

Beweis: Offenbar gilt

$$I(A+B) \supset I(A) + I(B)$$

(folgt aus: gilt $A \supset B$, so $I(A) \supset I(B)$). Es ist das Umgekehrte zu zeigen. Wir wenden wieder die Formel von Satz 8 an; wir verwenden aber nur einen Teil der Glieder der rechten Seite. Es ist allgemein

$$(A + B)^{c-} = (A^c B^c)^- \supset A^{c-} B^{-c} + A^{-c} B^{c-} + A^c B^c$$

und nach Komplementbildung

$$(A + B)^{c-c} \subset (A^{c-c} + B^-)(A^- + B^{c-c})(A + B) =$$
$$= (A^{c-c} + B^{c-c} + A^- B^-) \cdot (A + B) = A^{c-c} + B^{c-c} + AB^- + A^- B.$$

Nun sollen A und B separiert sein, d. h. es ist $AB^- + A^- B = 0$ und wir erhalten: $(A + B)^{c-c} \subset A^{c-c} + B^{c-c}$ oder $I(A + B) \subset I(A) + I(B)$ und aus (11) folgt in der Tat $I(A + B) = I(A) + I(B)$ w.z.b.w.

Bis jetzt wurden nur Mengen, Hüllen und Komplemente von Mengen betrachtet. Welche Rolle spielt für die Additivität der Hülle einer Menge A ihre Ableitung A' bzw. die des öfteren betrachtete Mengenfunktion

$$H(E) = E + E' \,?$$

Wenn man voraussetzt, daß gilt:

$$(\alpha) \qquad \overline{E} = E + E'$$

$$(\beta) \qquad (E + F)' = E' + F',$$

so kann man natürlich sofort schließen, daß auch $\overline{E + F} = \overline{E} + \overline{F}$ gilt. Auf diese Weise wird, wenn man von den Hausdorffschen Umgebungsaxiomen ausgeht, die Additivität der Hülle bewiesen. Wir werden die Bedingung (α) überhaupt nicht benützen, die Bedingung (β) nur in einer verallgemeinerten Form und werden die Additivität der Hülle beweisen. Es gilt der

Satz 10: Es sei die Mengenfunktion $H(E) = E + E'$ additiv, also $H(E + F) = H(E) + H(F)$. Daraus folgt bereits die Additivität der Hülle.

Beweis: Seien A und B abgeschlossen, sonst aber beliebig. Dann gilt (siehe Satz 5) $H(A) = A$, sowie $H(B) = B$. Nach Voraussetzung ist $H(A + B) = H(A) + H(B) = A + B$, also $H(A + B) = A + B$ und nach Satz 5 ist auch $A + B$ abgeschlossen. Daher folgt aus der Additivität der Mengenfunktion $H(E)$ bereits, daß die Summe zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, also in der Tat $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$. Damit ist der Satz bewiesen. Es wurde nicht verwendet: $E = E + E'$. Direkt aus Satz 3 folgt das

Korollar: Gilt allgemein

$$\limsup (A_i + B_i) = \limsup A_i + \limsup B_i,$$

so folgt daraus allgemein: $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$.

Literatur

[1] *M. Fréchet*, Les espaces abstraits, Paris 1928.
[2] *C. Kuratowski*, Topologie, Vol. I, Warszawa 1952.
[3] *C. Kuratowski*, Sur l'operation A de l'Analysis Situs, Fund. Math. 3, p. 81.
[4] *W. Sierpinski*, General Topology, Toronto 1952.

Buchbesprechungen

Opere Scelte. Von *G. Fubini*. Band I. 368 S. Rom: Edizioni Cremonese. 1957. L. 3500.—.

Nach den Plänen der Italienischen Mathematikervereinigung soll eine Auswahl aus den insgesamt 193 mathematischen Arbeiten *Fubinis* neu verlegt werden. Dabei sollen die Arbeiten über Analysis, über Gruppen und Hermitesche Formen, ferner schwer zugängliche Publikationen bevorzugt aufgenommen werden, daneben aber auch *Fubinis* repräsentative Leistungen aus angewandter Mathematik sowie seine in den letzten Lebensjahren in Amerika verfaßten Arbeiten (1939/43) Berücksichtigung finden. Von den drei in chronologischer Anordnung geplanten Bänden liegt der erste nunmehr vor. Er enthält 17 Arbeiten aus den Jahren 1899 bis 1904, ferner als Einleitung ein Verzeichnis sämtlicher Publikationen *Fubinis* sowie die Wiedergabe des Nachrufes, den *B. Segre* in der Accademia dei Lincei 1954 gehalten hat. *K. Mayrhofer*, Wien

Opere Scelte. Von *G. Peano*. Band I. (Analisi Matematica-Calcolo Numerico.) VII, 530 S. Rom: Edizioni Cremonese, 1957. L. 5000.—.

Von der seit 1923 geplanten Sammlung von Schriften von *G. Peano* ist voriges Jahr der erste Band erschienen. Die Ausgabe wird von *U. Cassina* redigiert und soll drei Bände mit folgender Einteilung umfassen: I. Analysis und Numerisches Rechnen; II. Mathematische Logik und Sprachliches; III. Geometrie und Grundlagen, Mechanik sowie Verschiedenes. Dabei sollen die Sprachstudien *Peanos*, insbesondere jene zur Schaffung einer internationalen Hilfssprache, zugunsten der eigentlich mathematischen Arbeiten auf einzelne Proben beschränkt werden. Der erschienene Band wird durch ein chronologisches Verzeichnis der Publikationen *Peanos* sowie ein Verzeichnis von kommentierenden Schriften eingeleitet. Die zahlreichen abgedruckten Arbeiten beziehen sich meist auf grundlegende Begriffe und Sätze und haben bis heute ihre Aktualität bewahrt. *K. Mayrhofer*, Wien

Vom Denken in Begriffen. Mathematik als Experiment des reinen Denkens. Von *A. I. Wittenberg*. Mit einem Geleitwort von *P. Bernays*. (Wissenschaft und Kultur: Band 12.) 360 S. Basel-Stuttgart: Birkhäuser-Verlag, 1957. sfr. 25.—.

Die Untersuchungen dieses Buches gehen aus von den aktuellen Grundlagenfragen der Mathematik; daran anschließend werden erkenntnistheoretische Fragen allgemeinster Art aufgerollt, eingehend durchleuchtet und auf ihre Lösbarkeit geprüft. Es zeigt sich dabei, daß die mathematischen Grundlagenprobleme typisch sind für die Schwierigkeiten, denen sich die menschliche Erkenntnis ganz allgemein gegenübersieht; so erweist sich die Mathematik als ein „Experiment des menschlichen Geistes", in dem dieser seine Möglichkeiten erproben und seine Grenzen erkennen kann; andererseits stellt sich aber auch heraus, daß eine vollkommene rationale Absicherung des Gedankengebäudes

der Mathematik in sich unmöglich ist, sondern daß auch diese Wissenschaft letzten Endes entscheidend mit der menschlichen Daseinssituation verbunden ist. Das sind also Erkenntnisse, die vor allem den an der Fundierung seines Faches interessierten Mathematiker angehen. Viel allgemeiner wirft jedoch der Verfasser die Frage auf, inwieweit die Gegebenheiten unseres Denkens „sinnvoll" sind, das heißt, in dem Grund unserer objektiven Erfahrung verankert, und zeigt, daß diese Frage grundsätzlich unlösbar ist. Andererseits jedoch ist das Erlebnis der Leistungsfähigkeit unseres Denkens ein nicht zu leugnender Bestandteil unserer Daseinssituation, so daß also ein totaler Skeptizismus konsequenterweise zum Verzicht auf Leben überhaupt führen müßte. Eine erkenntniskritische Auseinandersetzung mit unseren Begriffen bleibt deshalb unerläßlich, wenn wir auch auf eine geschlossene Theorie unserer Erkenntnis verzichten müssen. Ansätze zu so einer Auseinandersetzung in einem Rahmen, innerhalb dessen Erfolge zu erhoffen sind, werden vom Verfasser auch tatsächlich gegeben.

Das gehaltvolle und gedankenreiche Werk bildet ohne Zweifel einen bemerkenswerten Beitrag zur Klärung der geistigen Situation des Menschen, und wenn der Verfasser in der Einleitung schreibt: „Sollte diese Schrift nur diesen einen Erfolg haben, die Aufmerksamkeit, die sich allzu lange ausschließlich auf die handgreiflich-objektivierenden Einsichten der Naturwissenschaften gerichtet hatte, wiederum in stärkerem Maße auf dasjenige zu lenken, was das eigentliche Problem und das eigentliche Rätsel alles Erkennens ist: nämlich auf den Menschen selber, mit den Denkweisen und Denkmitteln, mit denen er sich erlebt und um derentwillen er sich selber ein vernunftbegabtes Wesen nennt — sollte diese Schrift nur diesen Erfolg haben, so hätte sie bereits ihren wichtigsten Zweck erfüllt", so können wir uns diesem Wunsch nur anschließen. *W. Nöbauer*, Wien

Mathematical Excursions. Side trips along paths not generally traveled in elementary courses in Mathematics. Von *H. A. Merril.* Mit 50 Textabb., XI, 145 S. New York: Dover Publications Inc., 1957, $ 1.—.

In diesem Buch veröffentlicht die Verfasserin zahlreiche interessante und unterhaltende Beispiele aus der elementaren Mathematik. Erwachsenen sowie Mittelschülern von der Mittelstufe an kann dieses Buch in stillen Stunden so manche Freude bereiten. (Das Beispiel 9 auf Seite 42 bedarf wohl einer Korrektur.)

J. Laub, Wien

Pythagoras im Urlaub. Von *B. Gündel.* Mit 53 Textabb., 155 S. Frankfurt a. M.-Berlin-Bonn: Verlag M. Diesterweg, 1958. Geb. DM 7.20.

Der eigenartige Titel läßt vermuten, daß in diesem Buch die heitere Mathematik zu Worte kommen soll. Der Leser dieses Buches macht gleichsam, um sich vom Ernst des Daseins zu erholen, einen vergnügten Spaziergang durch den großen Garten der Unterhaltungsmathematik, bleibt bald da, bald dort stehen und erfreut sich an den schönen Zuchtergebnissen.

In 101 Aufgaben werden behandelt: Streichholzspiele und mathematische Kartenkunststücke, Rechenkunststücke aller Art, verschiedene Eigenschaften der natürlichen Zahlen, Trugschlüsse, das Wetten und Würfeln, allerlei Denkaufgaben, zu deren Lösung bescheidene Kenntnisse aus der Physik erforderlich sind, Beispiele aus der Geometrie, bei denen Teilungen bzw. Zusammensetzungen eine Rolle spielen. Hervorgehoben sei, daß es dem Verfasser besonders angelegen ist, auch den mathematischen Kern der einzelnen Aufgaben bloßzulegen, was

von jenen Lesern begrüßt werden wird, die es vorziehen, länger bei einem Beispiel zu verweilen, um — wie bei einer Pflanze — bis zur Wurzel vordringen zu können. Ein vergnügliches Buch, das viel Freude bereiten wird. *J. Laub*, Wien

The Construction and Study of Certain Important Algebras. Von *C. Chevalley*. (Publications of the Mathematical Society of Japan: Band 1.) VI, 64 S. Tokyo: The Mathematical Society of Japan, 1955. $ 1.50.

Das Büchlein ist die Wiedergabe einer vom Autor im Jahr 1954 an der Universität Tokyo gehaltenen Vorlesung. Die darin behandelten Algebren sind die zu den quadratischen Formen gehörigen Clifford-Algebren. Zur Konstruktion und Untersuchung dieser Algebren werden einige Begriffe und Sätze aus der Theorie der gradierten Algebren und der Tensoralgebren benötigt, weshalb sich die ersten beiden Kapitel mit solchen Algebren beschäftigen. Als Spezialfall der Clifford-Algebren ergeben sich die schon von *Grassmann* eingeführten äußeren Algebren: Man erhält sie, wenn man für die quadratische Form die Nullform nimmt. Im Schlußkapitel werden einige Anwendungen der äußeren Algebren kurz besprochen.

Das wohlgelungene Buch ist jedenfalls ein vielversprechender Anfang für diese neue Schriftenreihe. *W. Nöbauer*, Wien

Introduction to the Theory of Numbers. Von *L. E. Dickson*. VIII, 193 S. New York: Dover Publications Inc. 1957. $ 1.65.

Diese neue Ausgabe ist ein unveränderter Nachdruck der ersten, 1929 erschienenen Auflage. Siehe die ausführliche und lobende Besprechung in dieser Zeitschrift, **40**, 2 (1933). *N. Hofreiter*, Wien

Cardinal and Ordinal Numbers. Von *W. Sierpiński*. (Polska Akademia Nauk, Monografie Matematyczne: Band 34.) 487 S. Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1958.

Sicher werden es viele sehr begrüßen, daß der Altmeister der Mengenlehre nun ein Lehrbuch in englischer Sprache herausgegeben hat. Es beschränkt sich keineswegs auf die zwei Abschnitte der Mengenlehre: Kardinal- und Ordinalzahlen. Sie haben nur zentrale Stellung. Das Buch beginnt mit den grundlegenden Begriffen und Sätzen der Mengenlehre, mit der Äquivalenz von Mengen, mit abzählbaren und nicht-abzählbaren Mengen, betrachtet Mengen von der Mächtigkeit des Kontinuums und erörtert die Möglichkeit einer Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat. Ausführlich wird das Auswahlaxiom behandelt und insbesondere wird meist erwähnt, ob ein Satz ohne Auswahlaxiom bzw. nur mit Auswahlaxiom beweisbar ist. Es werden auch zahlreiche Sätze entwickelt, die mit dem Auswahlaxiom äquivalent sind. Natürlich erfahren die Kardinalzahlen und die Ordinalzahlen eine besonders ausführliche Behandlung. Erwähnen möchte ich noch die Wohlordnung, die transfinite Induktion, Sätze über Alephs und insbesondere ihre Zusammenhänge mit der Kontinuumhypothese.

Bei dem reichen Inhalt werden die meisten Mathematiker ihr Kenntnisse erweitern können. Allen Studierenden der Mathematik werde das Buch auf das Wärmste empfohlen *N. Hofreiter*, Wien

Topologie. Band I. Von *C. Kuratowski*. (Polska Akademia Nauk, Monografie Matematyczne: Band 20.) Quatrième édition corrigée et augmentée d'un

appendice et de deux notes de *MM. A. Mostowski* et *R. Sikorski*. XIII, 494 S. Warschau: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1958.

Dies ist ein im wesentlichen unveränderter Neudruck der dritten Auflage (man vgl. die Besprechung, Monatshefte Bd. 57, 300, 1953), der noch durch einen Anhang über einige in letzter Zeit häufiger verwendete Begriffe (z. B. den eines bikompakten Raumes) und damit zusammenhängende Problemstellungen vermehrt ist. Ferner wurden zwei Noten von *Motowski* bzw. *Sikorski* über die Anwendungen der Topologie auf die mathematische Logik bzw. die Funktionalanalysis hinzugefügt. Die neue Form des Buches, das auch noch durch zahlreiche Literaturhinweise ergänzt wurde, wird diesem Standardwerk seine führende Stellung bewahren. *K. Prachar*, Wien

Theorie der Limitierungsverfahren. Von *K. Zeller*. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge: Heft 15.) VIII, 242 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1958. DM 36.80.

Es gehört ohne Zweifel viel didaktisches Geschick und intensive Sachkenntnis dazu, um ein solches Gebiet wie die Limitierungstheorie im Rahmen eines Ergebnisbandes darzustellen. Es sei aber gleich vorweggenommen, daß der Verf. zu diesem Unternehmen in wissenschaftlicher Hinsicht besonders berufen ist. Eine solche zusammenfassende Darstellung ist vor allen Dingen durch die Ergebnisse der polnischen Schule und des Tübinger-Kreises, aus dem auch der Verf. hervorgegangen ist, möglich geworden. Durch die Anwendung funktional-analytischer Methoden ist eine wesentliche Vereinheitlichung und Vertiefung der Theorie erzielt worden, und die Darstellung verrät immer wieder, daß der Verf. selbst maßgebliche Resultate erzielt hat. Die allgemeinen Gesichtspunkte stehen daher auch im Vordergrund (Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis, Struktur von Wirkfeldern, direkte Sätze, Umkehrsätze). Die verschiedenen speziellen Limitierungsverfahren werfen bekanntlich immer wieder interessante Einzelfragen auf, so daß der Verf. geradezu unübersehbare Mengen von Untersuchungen zu berücksichtigen und zu sichten und ordnen hatte. Das umfangreiche von 1880 bis 1955 reichende fast vollständige Literaturverzeichnis (mit Zitat der Besprechungen in den Mathematical Reviews und im Zentralblatt) muß daher auch besonders hervorgehoben werden. Den speziellen Verfahren sind drei weitere Kapitel des Bandes gewidmet, wobei naturgemäß die Verfahren vom Abelschen und Cesaroschen und die funktionentheoretischen Verfahren in den Vordergrund treten. Erwähnt sei noch ein allerdings recht knapper geschichtlicher Überblick am Anfang des Buches. Das Werk hat beinahe den Charakter eines Nachschlagwerkes und ist für den Fachmann einfach unentbehrlich. Der weniger vorgebildete Leser wird manches Mal mit den knappen Formulierungen etwas Schwierigkeit haben, aber die Bücher dieser Sammlung sollen ja auch keine Lehrbücher im eigentlichen Sinne sein. Jeder, der sich der Schwierigkeiten bewußt ist, die Limitierungstheorie in solcher Geschlossenheit darzustellen, wird dem Autor die Anerkennung für diese erste zusammenfassende moderne Darstellung der Theorie nicht versagen. *L. Schmetterer*, Hamburg

Lectures on Ergodic Theory. Von *P. R. Halmos*. (Publications of the Mathematical Society of Japan: Band III.) VII, 99 S. Tokyo: The Mathematical Society of Japan. 1956. $ 2.—.

Dieses Bändchen gibt einen ausgezeichneten Einblick in die wichtigsten Problemstellungen, Schlußweisen und Ergebnisse der Ergodentheorie. Da der

Verfasser sich keineswegs scheut — wie es leider heute manche Mathematiker tun — dort, wo es aus methodischen Gründen zweckmäßig ist, auf größtmögliche Allgemeinheit zu verzichten, werden die wesentlichen Gedankengänge sehr schön erkennbar. Die lebendige und klare Darstellungsweise wird wohl jedem Leser Freude machen.

Das Buch behandelt unter anderem: Wiederkehrsätze; die Ergodensätze von *v. Neumann* und *Birkhoff*, deren Beweise nach *F. Riesz* geführt werden; ergodische Transformationen; Mischungssätze; das Spektrum von ergodischen Transformationen; Topologien auf der Menge der maßtreuen Transformationen; invariante Maße. Zum Abschluß werden einige ungelöste Fragen aus dem Gebiet der Ergodentheorie angeführt. *W. Nöbauer*, Wien

Difference Methods for Initial-Value Problems. Von *R. D. Richtmyer*. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics: Band 4.) Mit 27 Textabb., XII, 238 S. New York-London: Interscience Publishers, 1958. $ 6.50.

Die Lösung partieller Differentialgleichungen durch Differenzenverfahren steht im Zeitalter der elektronischen Rechenmaschinen im Zentrum der Forschung. Es erhebt sich die Aufgabe, die Fehler abzuschätzen und Konvergenzbeweise zu führen: Das vorliegende Buch ist diesem Fragenkreis gewidmet. Es stehen hier die Ideen von *J. von Neumann*, *P. D. Lax* und dem Verfasser im Vordergrund. Das Zentrum des Buches bildet die Theorie von *P. D. Lax* über die Approximation von linearen Anfangswertproblemen durch Differenzengleichungen, welche dann explizit bei den partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ausgeführt wird. Eine Reihe von Anwendungen (Diffusions- und Wärmeleitungsproblem, Transportgleichung, Elastizitätstheorie und Hydrodynamik), welche sowohl lineare wie auch nichtlineare Gleichungen behandeln und mit den numerischen Resultaten vergleichen, bringen wertvolles Material und machen mit wichtigen Methoden vertraut. — Ein sehr wichtiges Buch, zu empfehlen für den Mathematiker wie für alle Physiker und Techniker, welche numerische Methoden anzuwenden haben. *E. Hlawka*, Wien

Ordinary Difference-Differential Equations. Von *E. Pinney*. Mit Textabb., XII, 262 S. Berkeley und Los Angeles: University of California Press. 1958. Geb. $ 5.—.

Differenzen-Differentialgleichungen stehen erneut im Mittelpunkt des Interesses und finden weitgehende Anwendungen. Der Verfasser gibt hier eine lehrbuchmäßige Darstellung des Gebietes. Er bringt sowohl allgemeine Lösungsmethoden (Integraltransformationen, erzeugende Funktionen usw.), wie auch Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise. Die Gleichungen mit konstanten Koeffizienten und die Bestimmung der Nullstellen der charakteristischen Gleichung werden ausführlich dargestellt. Eine Reihe von Gleichungen, welche sich als wichtig erwiesen haben und in der Literatur studiert wurden, werden hier im Detail behandelt. Dabei werden auch nichtlineare Gleichungen und hier im besonderen die Gleichung von *Minorsky* in Betracht gezogen.

Es liegt hier ein wertvolles Buch vor, welches eine Lücke in der Literatur schließt. Es ist gut geschrieben. *E. Hlawka*, Wien

Integral Equations. Von *F. G. Tricomi*. (Pure and Applied Mathematics: Band V.) Mit 14 Textabb., VIII, 238 S. New York-London: Interscience Publishers. 1957. $ 7.—.

Sowohl Mathematiker wie Physiker und Ingenieure interessieren sich für Integralgleichungen. Aber die Interessen gehen weit auseinander. Die Mathematiker verlangen einen exakten, möglichst allgemeinen Aufbau und legen großen Wert auf Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise. Die Physiker und Ingenieure hingegen kommen durch Probleme aus den Anwendungen zu den Integralgleichungen. Sie wollen die Lösungsmethoden kennen lernen. Es ist sehr schwer, ja fast unmöglich, in einem Buch über Integralgleichungen alle zu befriedigen. In weitgehendem Maße gelingt es aber doch dem Verfasser in dem vorliegenden Lehrbuch. In jedem Kapitel werden Beispiele gebracht und ausführlich gelöst. Dabei wird die Methode der sukzessiven Approximation mit Vorliebe angewandt. An Vorkenntnissen werden neben der Differential- und Integralrechnung auch Funktionentheorie vorausgesetzt. Wünschenswert ist, wenn dem Leser die *Lebesgue*sche Integrationstheorie einigermaßen bekannt ist, was allerdings bei Ingenieuren und Physikern kaum zutrifft. Die Sätze werden in genügender Allgemeinheit abgeleitet und auf Einfachheit wird großer Wert gelegt. Es erweist sich sehr vorteilhaft, daß die Theorie der Integralgleichungen im L_2-Raum statt im Raum der stetigen Funktionen abgeleitet wird. Es wird also angenommen, daß der Kern $K(x, y)$ quadratisch integrierbar ist, d. h. daß

$$|| K ||^2 = \int_0^h \int_0^h K^2(x, y)\, dx\, dy \leqq N^2$$

im *Lebesgue*schen Sinne existiert und nicht größer als eine gewisse Konstante N^2 ist. Auch soll die bei den Integralgleichungen auftretende Funktion $f(x)$ eine L_2-Funktion sein, d. h. es soll

$$|| f ||^2 = \int_0^h f^2(x)\, dx$$

existieren und endlich sein.

Die Mathematiker kommen in dem Buch mehr auf ihre Rechnung als die Ingenieure und Physiker. Die Stoffauswahl erfolgt im großen und ganzen nach bereits bewährten Vorbildern. Die Kapitelüberschriften lauten: I. *Volterra*-Gleichnngen, II. *Fredholm*-Gleichungen, III. Symmetrische Kerne und orthogonale Systeme von Funktionen, IV. Einige Typen von singulären und nicht linearen Integralgleichungen.

Jeder Leser erfreut sich an der Einfachheit der Darstellung, an dem bunten Wechsel von Theorie und Praxis und an den Querverbindungen von Integralgleichungen und Differentialgleichungen, Eigenwerten und Eigenfunktionen, orthogonalen Funktionen, *Fourier*schen Reihen, *Neumann*schen Reihen, *Bessel*funktionen, *Dirichlet*schem Problem, u. v. a. Der Autor hat damit ein modernes Lehrbuch über Integralgleichungen geschrieben und seine Reihe von vorzüglichen Lehrbüchern um eines vermehrt. *N. Hofreiter*, Wien

A Treatise on Plane and Advanced Trigonometry. Von *E. W. Hobson*. Siebente Auflage. Mit 66 Textabb., XV, 383 S. New York: Dover Publications Inc., 1957. $ 1.95.

Diese Neuauflage ist ein Abdruck der 7. Auflage aus dem Jahre 1928, die unter dem Titel „a treatise on plane trigonometry" erschienen ist. Die 1. Auflage dieses vielgelesenen und auch im deutschen Sprachraum beliebten Werkes stammt aus dem Jahre 1891.

Der Verfasser entwickelt die Trigonometrie ausgehend von den grundlegendsten Begriffsbildungen weit über das sonst übliche Maß hinaus und stellt so viele Querverbindungen zu anderen Gebieten der Mathematik, wie Reihenlehre, Analysis, Algebra und Funktionentheorie her. Eine Unzahl von Problemen und Formeln finden sich im Text behandelt, fast 700 Beispiele ergänzen die einzelnen Abschnitte. Ein kurzer Inhaltsüberblick: Winkelfunktionen, Funktionen vielfacher Winkel, trigonometrische Tabellen, Auflösung ebener Dreiecke, komplexe Zahlen, unendliche Reihen, Exponentialfunktion und Logarithmus, hyperbolische Reihen, unendliche Produkte, Irrationalität von π.

H. Brauner, Wien

Schaum's Outline of Theory and Problems of Plane and Spherical Trigonometry. Including 680 solved problems, completely solved in detail. Von *F. Ayres, Jr.* 207 S. New York: Schaum Publishing Company. 1954. $ 1.95.

Die ebene und sphärische Trigonometrie erfahren in diesem Buch eine sehr breite Darstellung. Jedes der 24. Kapitel beginnt mit einer Zusammenfassung der für dieses Kapitel wichtigen Definitionen und Sätze. Es folgen Beispiele mit ausführlicher Durchrechnung und zahlreiche Übungsaufgaben mit Angabe der Lösungen. Es wäre sehr zu empfehlen, die zahlreichen fehlerhaften Kugeldarstellungen in der sphärischen Trigonometrie zu verbessern. *J. Laub*, Wien

Darstellende Geometrie. Von *F. Rehbock.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 92.) Mit 110 ganzseitigen Abb. und 2 Porträts, XV, 232 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1957. DM 23.—, geb. DM 26.80.

Dieses neue Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, das nach Meinung des Autors den ungefähren Inhalt einer Hochschulvorlesung in Deutschland darstellen soll, bringt in gedrängter Form die Auf- und Grundrißmethode, Axonometrie, Perspektive, Photogrammetrie und Reliefperspektive; die kotierte Projektion wird nur kurz im Zusammenhang mit der Eintafelprojektion und den Böschungsflächen besprochen. In geschickter Form werden die Flächen 2. Grades, die Drehflächen, Böschungsflächen und Schraubflächen eingeführt und unter Verwendung der entwickelten Abbildungsmethoden untersucht. Auffallend ist dabei die Tendenz des Autors, dem Leser möglichst bald brauchbare Methoden in die Hand zu geben, um rasch und sicher anschauliche Bilder geometrischer und technischer Raumformen entwickeln zu können. Die dazu nötige Theorie wird vielfach ohne Beweis mitgeteilt, doch sind an den betreffenden Stellen stets Literaturhinweise angeführt, die dem Leser eine Ergänzung des Stoffes erleichtern. Besonders gelobt muß die prägnante (in manchen Fachausdrücken allerdings etwas ungewohnte) Sprache werden, die neben den zahlreichen Textfiguren, die jeweils eine ganze Buchseite ausfüllen, die Lektüre dieses ausgezeichneten Werkes zu einem Genuß machen; der zu den Textfiguren gehörige Text steht jeweils neben der Bildseite. Die Figuren, wesentlich größer als sonst üblich (und damit besonders gut zum Nachzeichnen geeignet) und frei von allen entbehrlichen Hilfslinien, befriedigen die verwöhntesten Ansprüche. Für den Ausführungsstandard des Werkes sprechen die ganzseitigen Porträts von *G. Monge* und *J. H. Lambert*, die neben zahlreichen historischen Bemerkungen und einer kurzen mit Illustrationen belegten Geschichte der Perspektive den Leser auf die historische Stellung der Darstellenden Geometrie hinweisen.

H. Brauner, Wien

Lie Groups and Differential Geometry. Von *K. Nomizu.* (Publications of the Mathematical Society of Japan: Band 2.) XIV, 80 S. Tokyo: The Mathematical Society of Japan, 1956. $ 1.80.

Das Buch gibt eine Einführung in die moderne Behandlungsweise der Differentialgeometrie im Großen, wie sie in den letzten Jahren aufbauend auf die grundlegenden Untersuchungen *E. Cartans*, von verschiedenen Mathematikern entwickelt wurde. Es wird dabei vorausgesetzt, daß der Leser schon vertraut ist mit den Elementen der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, der Lie-Gruppen und der Faserräume; die später benötigten Grundtatsachen aus diesen Gebieten werden im ersten Kapitel des Buches kurz zusammengestellt. Das zweite Kapitel entwickelt die Theorie der Zusammenhänge in Faserräumen. Im dritten Kapitel werden lineare Zusammenhänge untersucht, und diese Untersuchung führt dann zu den klassischen Ergebnissen der Riemannschen Geometrie.

So wird es dem Leser möglich gemacht, rasch und ohne große Mühe die Grundideen eines neuen, hoffnungsvollen Gebietes der Mathematik kennenzulernen. *W. Nöbauer*, Wien

Linear Programming and Economic Analysis. Von *R. Dorfman, P. A. Samuelson* und *R. M. Solow.* (A RAND Corporation Research Study.) Mit 82 Textabb., IX, 527 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, 1958. 77/6d.

Es ist ein ungeheurer Vorteil der Mathematik, ganz verschiedene Probleme einheitlich darstellen und lösen zu können. Viele Probleme der Ökonometrie lassen sich als lineare Programmierungs-Probleme auffassen. Das Buch gibt eine breite Einführung in die lineare Programmierung. Den Mathematiker wird das 4. Kapitel (Algebra der linearen Programmierung) am meisten interessieren. Hier wird die lineare Programmierung als ein Problem der Algebra dargestellt und die Lösungen werden durch algebraische Methoden gefunden. Die Grundaufgabe lautet:

Es soll

$$Z = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \tag{1}$$

ein Maximum (bzw. Minimum) werden, wobei die Nebenbedingungen

$$a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \leqq c_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2}$$

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0 \tag{3}$$

zu erfüllen sind.

Während es Lösungsformeln für lineare Gleichungssysteme gibt, sind keine Formeln bekannt, um die Lösungen von (1—3) direkt zu finden. Von den bisher bekannten Methoden werden die Simplexmethode und die direkte deskriptive Methode auseinandergesetzt. Die erste Methode ist ein iteratives Verfahren, die zweite Methode ein Rekursionsverfahren. Interessant ist auch die geometrische Deutung und damit das Hereinspielen der Eigenschaften der konvexen Polyederflächen. Dem Mathematiker gewährt das Buch eine Einsicht in die moderne Ökonometrie. Ich muß aber doch feststellen, daß das Buch in erster Linie für Interessenten der Ökonometrie geschrieben ist. Im Vordergrund stehen stets ökonometrische Gesichtspunkte und die dabei auftretenden praktischen Probleme. Kenntnisse aus höherer Mathematik werden nicht vorausgesetzt.

Eine Anführung der wichtigsten Kapitelüberschriften möge den Inhalt andeuten: Linear programming, the valuation problem, the transportation problem, the *Leontief*-system (input and output analysis), dynamic aspects of linear models, efficient programs of capital accumulation, the theory of general equilibrium, welfare economics, game theory. *N. Hofreiter*, Wien

Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Von *T. W. Anderson.* (Wiley Publications in Statistics: Mathematical Statistics.) Mit 16 Textabb., XII, 374 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1958. $ 12.50.

Das Buch bringt die grundlegenden Methoden der mathematischen Statistik von mehreren Variablen. Der Leser soll mit Verteilungen in einer zufälligen Variablen vertraut sein. Die Übertragung vieler Formeln bei eindimensionaler Verteilung auf Formeln bei mehrdimensionaler Verteilung gelingt mit Hilfe von Vektoren und Matrizen oft in relativ einfacher Weise. Daher werden Vektoren und Matrizen stets verwendet und vom Leser Kenntnisse aus linearer Algebra vorausgesetzt. Zur Erleichterung bringt der Anhang eine summarische Behandlung der Matrizenrechnung. Es werden mehrdimensionale Normalverteilungen zugrunde gelegt. Die Beschränkung auf diese kann damit begründet werden, weil sie in der Praxis oft auftreten und darüber am meisten bekannt ist. Eine gewisse Rechtfertigung liefert auch der allgemeine zentrale Grenzwertsatz. Bedeutungsvoll ist die Tatsache, daß Randverteilungen und bedingte Verteilungen von mehrdimensionalen Normalverteilungen wieder normal sind. Anstelle der Parameter: Mittelwert und Streuung im eindimensionalen Fall treten der Mittelwertsvektor und die Kovarianzmatrix. Um diese Größen mit Hilfe von Stichproben zu schätzen, kann die Maximum-Likelihood-Methode mit Vorteil angewandt werden. Von großer Wichtigkeit ist die Ermittlung der Verteilung von Stichprobengrößen wie Mittelwertsvektor, Kovarianzmatrix, Regressionskoeffizienten, partielle und mehrfache Korrelationskoeffizienten. Das Analogon des t-Tests im eindimensionalen Fall ist der T^2-Test bei mehrdimensionalen Verteilungen. Anstelle von Konfidenzintervallen treten Konfidenzbereiche. Bei der Verallgemeinerung der Varianzanalyse tritt ein mehrdimensionales Analogon des F-Tests auf. Der Maximum-Likelihood-Quotiententest erweist sich beim Prüfen von Hypothesen bei mehrdimensionalen Verteilungen als sehr brauchbar. Hat man sich unter mehreren Hypothesen für eine zu entscheiden, so führt dieses Problem zu statistischen Entscheidungsfunktionen. Hier wird die Theorie der Klassifikation allgemein entwickelt und auf Fälle mit Normalverteilung angewandt. Fragen, wie das Koordinatensystem zu wählen ist, damit die zufälligen Variablen gewisse statistische Eigenschaften ergeben, z. B. extremale Streuung oder extremale Korrelation, sind äquivalent mit algebraischen Problemen wie Drehung der Kovarianzmatrix auf Diagonalform, Ermittlung der charakteristischen Wurzeln und der charakteristischen Vektoren. Das Buch enthält nach jedem Kapitel eine große Anzahl von interessanten Aufgaben und ist allen, die tiefer in die mathematische Statistik eindringen wollen, bestens zu empfehlen. *N. Hofreiter*, Wien

Some Aspects of Multivariate Analysis. Von *S. N. Roy.* (Indian Statistical Series: Nr. 1.) VI, 214 S. New York: John Wiley & Sons, Calcutta: Indian Statistical Institute. 1957. $ 8.—.

Wie schon aus dem Titel zu erwarten ist, umfaßt das Buch nicht die ganze mehrdimensionale mathematische Statistik. Es stellt eine Auswahl dar und

bringt vor allem Ergebnisse, die in den letzten Jahren vom Autor und von *Bose, Cochran, Mitra, Nandi, Neyman, Olkin, Ramachandran, Scheffe* u. a. gefunden wurden. Bei der knappen Darstellung kann man nicht von einem Lehrbuch, sondern von einer Monographie sprechen. In den Kapiteln 2 bis 14 liegen Normalverteilungen zugrunde. Das Schwergewicht liegt auf dem Prüfen von Hypothesen und auf der Ermittlung von Konfidenzbereichen. Insbesondere nenne ich Tests für die allgemeine mehrdimensionale lineare Hypothese, ferner Tests für mehrdimensionale Varianzanalyse und für die Unabhängigkeit zwischen zwei Systemen von zufälligen Variablen. Das 15. Kapitel handelt von parameterfreien Methoden. Der Anhang umfaßt 78 Seiten und enthält Sätze über die charakteristischen Wurzeln von Matrizen, über Funktionaldeterminanten und über mehrfache Integrale. Die Monographie hat mit dem oben rezensierten Lehrbuch von *Anderson* wenig gemeinsam. Weitere Monographien zur mathematischen Statistik sind geplant. Dies ist zu begrüßen, da Monographien zur stärkeren Verbreitung der neu erzielten Ergebnisse beitragen. *N. Hofreiter*, Wien

Perspektivische Verkürzungen im Raum, und quasiperspektivische Verkürzungen in Raum und Zeit. Versuch einer Auflösung des Paradoxen an den allein auf Raum und Zeit bezüglichen Aussagen der speziellen Relativitätstheorie. Von *F. Lotmar*. 109 S. Zürich: Orell Füssli Verlag. 1958. sfr. 15.55, DM 15.—.

Verf. glaubt aus den üblichen Transformationsgleichungen der speziellen Relativitätstheorie $x' = \dfrac{x - v\,t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ und $t' = \dfrac{t - v\,x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ in Verbindung mit den Gleichungen $x = c\,t$ und $x' = c\,t'$ folgende Schlüsse ziehen zu können: 1. Das Theorem der Relativität der Gleichzeitigkeit läßt sich mittels des üblichen Beweisganges aus den Transformationsgleichungen nicht schlüssig ableiten. 2. Eine Zeitdilatation im korrekten Wortsinne kann aus den Transformationsgleichungen nicht abgeleitet werden; und zwar gilt jene Unableitbarkeit sowohl für die aus der Transformationsgleichung $t' = \dfrac{t - v\,x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ vermeintlich ohne weiteres folgende Dilatation der Zeitspanne zwischen zwei der nämlichen Abszisse des ruhenden Systems angehörigen Ereigniszeitpunkten, als auch für eine von *Einstein* in seiner gemeinverständlichen Darstellung der Relativitätstheorie unter speziellen Voraussetzungen gegebene Ableitung von Zeitdilatationen aus den Transformationsgleichungen. 3. Für Strecken $x_2 - x_1$ läßt sich aus den Transformationsgleichungen eine bei Beobachtung vom ruhenden System her in Erscheinung tretende Verkürzung der zugeordneten Größe des transferierten Systems vom Grade $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ („*Lorentz*-Kontraktion") in stimmiger Weise nicht ableiten. Wohl dagegen eine Kontraktion von dem um das $(1 + v/c)$-fache ausgiebigerem Grade $\sqrt{\dfrac{c - v}{c + v}}$. Diese Kontraktion nennt der Verf. eine „Über-*Lorentz*-Kontraktion". *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Proceedings / Bericht / Comptes rendus

VIII[th] International Astronautical Congress
VIII. Internationaler Astronautischer Kongress
VIII[c] Congrès International d'Astronautique

Barcelona 1957. Editorial Board / Herausgegeben von / Comité des rédacteurs: P. J. Bergeron, Paris; W. v. Braun, Huntsville/Ala.; K. A. Ehricke, San Diego/Calif.; F. Hecht, Wien; J. Marial, Barcelona; E. Sänger, Stuttgart; K. Schütte, München; L. I. Sedov, Moskva; L. R. Shepherd, Chilton; S. F. Singer, College Park/Md.; Editor-in chief / Schriftleitung / Rédacteur en chef: **F. Hecht**, Wien. Mit 233 Textabbildungen. VII, 607 Seiten. Gr.-8°. 1958.

Ganzleinen S 750.—, DM 125.—, sfr. 128.—, $ 29.75

Mitglieder der an die IAF angeschlossenen Gesellschaften und Bezieher der „Astronautica Acta" erhalten den Berichtsband zu einem um 20% ermäßigten Bezugspreis

Ganzleinen S 600.—, DM 100, sfr. 102.40, $ 23.80.—

Contents — Inhalt — Sommaire

Barré, J.-J. Essai de contribution à l'autopropulsion nucléaire. — **Barré, J.-J.** Essai de contribution à la propulsion ionique. — **Beckh, H. J. von.** Multi-Directional G-Protection in Space Vehicles. — **Bednarczyk, H.** Über die Strömung von Zweiphasengemischen. — **Bergqvist, B.** The Weight of Minimum Cost Orbital Ferry Vehicles. — **Bún, Th. P.,** and **F. A. Pereira.** "Biospheric Index", a Contribution to the Problem of Determination of the Existence of Extra-Solar Planetary Biospheres. — **Cremona, C. E.** Previsione tempestiva delle caratteristiche del moto di mobili aero-balistici nella cibernetica aeronautica. — **Davis, W. O.** Research Goals in Astronautics. — **Ehricke, K. A.** Instrumented Comets — Astronautics of Solar and Planetary Probes. — **Gadomski, J.** Die Sternenökosphären im Radius von 17 Lichtjahren um die Sonne. — **Gazley, C., Jr.,** and **D. J. Masson.** Recovery of a Circum-Lunar Instrument Carrier. — **Glaser, P. E.** On the Generation of Temperatures to 30,000° K. — **Gravalos, F. G.** A Method of Integrating the Equations of Motion of a Body Entering an Arbitrary Atmosphere with an Automatic Error Analysis. — **Gutton, H.** Pilotage d'un astronef par des moyens radioélectriques. — **Haley, A. G.** Space Law—The Development of

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

Jurisdictional Concepts. — **Heinrich, G.**, und **W. Peschka.** Über Stabilitätsuntersuchungen an flüssigkeitsgetriebenen Raketenmotoren mit Hilfe des Verfahrens der „Harmonischen Balance". — **Herrick, S., R. M. L. Baker, Jr.,** and **C. G. Hilton.** Gravitational and Related Constants for Accurate Space Navigation. — **Kaulbersz, J., R. Bilski, I. Kocyan, A. Ogiński, D. Wiecha,** and **J. Zbiegień.** Alterations in Some Blood Reactions and in the White Cell Count during the Total Eclipse of the Sun in Poland 1945. — **Koelle, H. H.** Optimization Considerations for Orbital Payload Capabilities. — **Manring, E. R.,** and **J. F. Bedinger.** Sodium Emission at 140 km. — **Miele, A.** Optimum Burning Program as Related to Aerodynamic Heating for a Missile Traversing the Earth's Atmosphere. — **Neat, W. N.** The Problem of Variable Thrust. — **Patterson, R. T.** Vertical Recovery. Feasibility of the Physical Recovery of Scientific-Research Payloads from Very-High-Altitude Near-Vertical Trajectories. — **Petersen, N. V.** Recovery Techniques for Manned Earth Satellites. — **Roberson, R. E.** Attitude Control of a Satellite Vehicle—an Outline of the Problems. — **Romick, D. C., R. E. Knight,** and **S. Black.** Meteor, Jr., a Preliminary Design Investigation of a Minimum Sized Ferry Rocket Vehicle of the Meteor Concept. — **Schmidt, I.** Spaces of Potential Visibility of Artificial Satellites for the Unaided Eye. — **Simons, D. G.** Observations from the Manhigh II Balloon Capsule at 30 Kilometers. — **Slater, A. E.** The Probability of Intelligent Life Evolving on a Planet. — **Stuhlinger, E.** Design and Performance Data of Space Ships with Ionic Propulsion Systems. — **Subotowicz, M.** Einige Optimalisationsprobleme in der Theorie der Stufenraketen und ein einfaches Verfahren zur Ermittlung der optimalen Parameter der Stufenraketen. — **Toftoy, H. N.** U. S. Army Support of Scientific Activities in Astronautics. — **Whipple, F. L.** The Meteoritic Risk to Space Vehicles. — **Whipple, F. L.,** and **J. A. Hynek.** Optical and Visual Tracking of Artificial Satellites. — **Winzen, O. C.** Ten Years of Plastic Balloons. — **Winzen, O. C.** The Manhigh II Balloon Operation. — **Vernov, S. N., V. L. Ginzburg, L. V. Kurnosova, L. A. Razorionov,** and **M. I. Fradkin.** Study of the Primary Cosmic Radiation by Using Artificial Satellites of the Earth. — **Yegorov, V. A.** Some Problems Relating to the Dynamics of the Flight to the Moon. — **Masevich, A. G.** Visual Observations of the Earth's Satellite in the USSR. — **Okhotsimsky, D. E.,** and **T. M. Eneiev.** On the Establishment of an Artificial Satellite of the Earth in Orbit. — **Okhotsimsky, D. E., T. M. Eneiev,** and **G. P. Taratynova.** Determining the Time of Existence of the Artificial Earth Satellite and Studying Secular Perturbations of its Orbit. — **Gerathewohl, S. J., O. L. Ritter,** and **H. D. Stallings, Jr.** Producing the Weightless State in Jet Aircraft. — **Haviland, R. P.,** The Communication Satellite. — **Klemperer, W. B.,** and **E. T. Benedikt.** Selenoid Satellites. — **Kooy, J. M. J.** On Relativistic Rocket Mechanics. — **Singer, S. F.,** Interplanetary Ballistic Missiles—A New Astrophysical Research Tool.